$\boxed{1}$ x, y, z, p は自然数で

$$xy + yz + zx = pxyz, \quad x \leqq y \leqq z \qquad \cdots\cdots①$$

を満たしている．次の問いに答えよ．

(1) $p \leqq 3$ を示せ．

(2) ①を満たす自然数の組 $(p,\ x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．

$\boxed{2}$ 一列に並んだ3つの部屋A，B，Cがあり，2頭の象がいる．2頭の象は毎日1つの部屋から隣の部屋に，次のルールに従って移動する．

$0 < p < 1$ とし，象が部屋Aと部屋Bにいるとき，部屋Aにいる象は部屋Aに留まり，部屋Bにいる象が確率 p で部屋Cに移る．象が部屋Bと部屋Cにいるとき，部屋Cにいる象は部屋Cに留まり，部屋Bにいる象が確率 $1-p$ で部屋Aに移る．象が部屋Aと部屋Cにいるとき，部屋Aにいる象が確率 p で部屋Bに移り，移らない場合は部屋Cにいる象が部屋Bに移る．2頭の象が同時に同じ部屋にいることはできない．

はじめに2頭の象はそれぞれ部屋Aと部屋Bにいるものとし，$2n$ 日後に象が部屋Aにいる確率を a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(3) $p = \dfrac{2}{3}$ のとき，a_n を求めよ．

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = x\log x - x\ (x > 0)$ の増減を調べ，そのグラフをかけ．

(2) a を正の実数とする．曲線 $C : y = \log(x+1)$ 上の点 $(t,\ \log(t+1))$ における接線 ℓ_t が，曲線 $C_a : y = a\log x$ 上の点 $(s,\ a\log s)$ における接線にもなっているとき，t と s の関係を a を含まない式で表せ．

(3) 任意に与えられた $t > -1$ に対して，直線 ℓ_t が曲線 C_a の接線にもなっているような a が唯一つ存在すること，および $a > 1$ であることを示せ．

(4) 直線 ℓ_t が曲線 C_a の接線になっているとき，その接点の x 座標を $s(t)$ とかくことにする．$s(t)$ を t の関数とみて増減を調べ，さらに $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(s(t)-t)$ を求めよ．

$\boxed{4}$ a を正の実数とする．双曲線 $C : x^2 - a^2y^2 + a^2 = 0$ 上の 4 点 $\mathrm{A}_1(0,\ 1)$，$\mathrm{A}_2(0,\ -1)$，$\mathrm{A}_3(a,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{A}_4(-2a,\ -\sqrt{5})$ が与えられている．A_1 における C の接線を ℓ_1，A_3 における C の接線を ℓ_3 とする．次の問いに答えよ．

(1) ℓ_1 と ℓ_3 の交点 S の座標を求めよ．

(2) 直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と直線 $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ の交点 U の座標，および直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$ と直線 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の交点 V の座標を求めよ．

(3) 3 点 S，U，V が同一線上にあることを示せ．

$\boxed{5}$ aを正の実数とし，$f(x)=e^{-x}\sin ax$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) nを自然数とする．曲線 $y=f(x)$ $\left(\dfrac{2(n-1)\pi}{a} \leqq x \leqq \dfrac{2n\pi}{a}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を A_n で表すとき，A_n を a と n を用いて表せ．

(2) $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ を a を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} S$ を求めよ．

$\boxed{6}$ ある臓器にできる腫瘍Xは悪性と良性の2つの型に分けられ，同時に両方の型であることはない．実際にXがある人とない人の割合は3％と97％であり，Xがある人のうち，悪性の人と良性の人の割合は1：2である．そして，腫瘍Xがあるかないかを調べる検査Yについて，次の事が知られている．

(ｉ) 悪性のXがある人にYが用いられると，95％の確率でXがあると判定される．

(ii) 良性のXがある人にYが用いられると，80％の確率でXがあると判定される．

(iii) Xがない人にYが用いられると，90％の確率でXがないと正しく判定される．

ある人が，この検査Yを受けることになった．このとき，次の確率を求めよ．

(1) この人にXがあると判定される確率

(2) Xがあると判定されたとき，悪性のXが実際にある確率

(3) 悪性のXが実際にないとき，Xがないと判定される確率

7 n を正の整数とし，$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で $f(x) = \sin x$，$g(x) = \sin x \sin^2 nx$ とおく．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = g(x)$ と x 軸が囲む部分の面積を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の共有点のうち，共通の接線をもつすべての点の座標を求めよ．

(3) (2) で求めたすべての接点の y 座標の値の平均を A_n とおくとき，$\lim_{n \to \infty} A_n$ を求めよ．

8 a は実数で $a > 1$ とし，曲線 $y = \log x$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ \log a)$，$\mathrm{B}\left(\frac{1}{a},\ \log \frac{1}{a}\right)$ をとる．直線 AB と曲線 $y = \log x$ で囲まれた部分の面積を S とし，直線 AB，x 軸，直線 $x = \frac{1}{a}$ および直線 $x = a$ で囲まれた部分の面積を T とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) S，T を a を用いて表せ．

(2) 次の極限値を求めよ．ただし，(iii) において必要であれば

$$x > 0 \text{ のとき，} \log(1 + x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを証明なしに用いてよい．

(i) $\displaystyle\lim_{a \to \infty} \frac{S}{T}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{a \to 1+0} \frac{T}{(a-1)^2}$

(iii) $\displaystyle\lim_{a \to 1+0} \frac{S}{(a-1)^2}$　　(iv) $\displaystyle\lim_{a \to 1+0} \frac{S}{T}$

(3) $a > 1$ の範囲で，$\frac{S}{T}$ は単調に増加することを示せ．

(4) $S = T$ となる a が $e^{\frac{3}{2}} < a < e^2$ の範囲に唯 1 つあることを示せ．ただし，e は自然対数の底で $e = 2.7182\cdots$ である．

$\boxed{9}$ $\triangle$ABC において，AB $= 2$，BC $= 3$，CA $= \sqrt{7}$ とする．AB に関して C と反対側に点 S を $\triangle$ASB が正三角形となるようにとる．また，BC に関して A と反対側に点 T を $\triangle$BTC が正三角形となるようにとる．さらに $\triangle$ASB の外接円と $\triangle$BTC の外接円との交点のうち，B と異なる点を P とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\angle$ABC の大きさを求めよ．

(2) $\triangle$PAB $\backsim$ $\triangle$PBC であることを示し，AP，BP，CP の長さをそれぞれ求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

$\boxed{10}$ n は正の整数とする．点 $(n,\ 0)$ を通り，曲線 $C : y = e^{-x}$ に接する直線を L_n とし，その接点を P_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) P_n の座標を求めよ．

(2) L_n と L_{n+1} の交点を Q_n とする．Q_n の座標を求めよ．

(3) 2 直線 L_n，L_{n+1} および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_n とおくとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ．

11 a, b, c を実数とする．3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解を α, β, γ とする．これらの解は次の4つの条件を満たす．

（i）$\gamma=-\dfrac{1}{2}$

（ii）$|\alpha|=|\beta|=1$

（iii）α の虚部は正である

（iv）複素数平面上の点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ は同一直線 L 上にある

このとき，次の問いに答えよ．

(1) a, b, c および α, β の値を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ が直線 L 上を動くとき，$w_1=\dfrac{1+4z}{2z}$ で表される点 $\mathrm{Q}(w_1)$ の軌跡を複素数平面上に図示せよ．

(3) 動点 $\mathrm{R}(w_2)$ は，$\arg\left(\dfrac{\beta-w_2}{\alpha-w_2}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}$ を満たす．
このとき，$\mathrm{R}(w_2)$ の軌跡を複素数平面上に図示するとともに，(2)で求めた $\mathrm{Q}(w_1)$ との距離 $|w_1-w_2|$ のとりうる値の範囲を求めよ．

12 Oを原点とする座標平面上に長さ1の線分ABがある．線分ABの端点Aは x 軸上の $x\geqq 0$ の部分を，端点Bは y 軸上の $y\geqq 0$ の部分を動くものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分ABが x 軸となす角 $\angle\mathrm{OAB}$ が θ であるとき，直線ABを L_θ で表す．直線 L_θ の方程式を求めよ．ただし，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である．

(2) t は $0<t\leqq 1$ を満たす定数とする．直線 $x=t$ と直線 L_θ との交点を P_θ とする．点 P_θ の y 座標が最大となる θ を α とするとき，$\cos\alpha$ を t を用いて表せ．

(3) 点 P_α の直交座標 $(x,\ y)$ を α を用いて表せ．また $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，点 P_α の極座標を求めよ．

(4) α が $0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 P_α の描く曲線を C とする．C 上の点 P_α における接線が L_α であることを示し，C の概形を図示せよ．

$\boxed{13}$ ある駐車場には4つの駐車枠A，B，C，Dが，アルファベット順に1列に並んでいる．そして自動車は，4台が順に入場して，空いている枠に次の確率で駐車する．

（ｉ）BとCのうち先着の自動車が隣の枠に駐車している枠，およびDには，等しい確率で駐車する．

（ii）Aに駐車する確率，およびBとCのうち両隣が空いている枠に駐車する確率は，（ｉ）の確率の3倍である．

このとき，次の確率を求めよ．ただし，1台目の自動車が入場するときには，4つの枠はすべて空いている．

(1) 1台目の自動車がAに駐車する確率

(2) 3台目の自動車が入場したとき，BとDに自動車が駐車している確率

(3) 4台目の自動車が入場したとき，Cに自動車が駐車していない確率

旭川医科大学

2014年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ 一列に並んだ3つの部屋A，B，Cがあり，2頭の象がいる．2頭の象は毎日1つの部屋から隣の部屋に，次のルールに従って移動する．

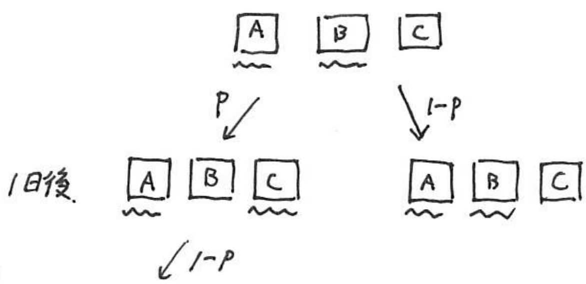
$0 < p < 1$ とし，象が部屋Aと部屋Bにいるとき，部屋Aにいる象は部屋Aに留まり，部屋Bにいる象が確率 p で部屋Cに移る．象が部屋Bと部屋Cにいるとき，部屋Cにいる象は部屋Cに留まり，部屋Bにいる象が確率 $1-p$ で部屋Aに移る．象が部屋Aと部屋Cにいるとき，部屋Aにいる象が確率 p で部屋Bに移り，移らない場合は部屋Cにいる象が部屋Bに移る．2頭の象が同時に同じ部屋にいることはできない．

はじめに2頭の象はそれぞれ部屋Aと部屋Bにいるものとし，$2n$ 日後に象が部屋Aにいる確率を a_n ($n = 1, 2, \cdots$) とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(3) $p = \dfrac{2}{3}$ のとき，a_n を求めよ．



(1) 2日後に象がAにいる確率 a_1

$$a_1 = p\cdot(1-p) + 1-p$$
$$= \underline{1-p^2}$$

(2) はじめにAとCにいる場合も $a_1 = 1-p^2$ となるので

$$a_{n+1} = (1-p^2)a_n + \{(1-p)^2 + p(1-p)\}(1-a_n)$$
$$= \underline{p(1-p)a_n + 1-p}$$

(3) (2)に $p = \frac{2}{3}$ を代入して．

$$a_{n+1} = \frac{2}{9}a_n + \frac{1}{3}$$

$$a_{n+1} - \frac{3}{7} = \frac{2}{9}\left(a_n - \frac{3}{7}\right)$$

$\therefore \left\{a_n - \frac{3}{7}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{3}{7} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{3}{7} = \frac{8}{63}$，公比 $\frac{2}{9}$ の数列

$\therefore a_n - \frac{3}{7} = \frac{8}{63}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$　　$\therefore a_n = \underline{\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(\frac{2}{9}\right)^n}$

2013年 医学部 第2問

数理 石井K

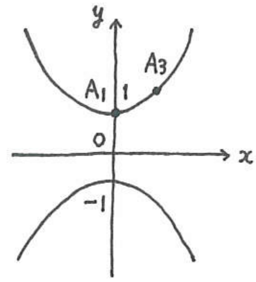
$\boxed{2}$ aを正の実数とする．双曲線C：$x^2 - a^2y^2 + a^2 = 0$上の4点$A_1(0,\ 1)$，$A_2(0,\ -1)$，$A_3(a,\ \sqrt{2})$，$A_4(-2a,\ -\sqrt{5})$が与えられている．A_1におけるCの接線をℓ_1，A_3におけるCの接線をℓ_3とする．次の問いに答えよ．

(1) ℓ_1とℓ_3の交点Sの座標を求めよ．

(2) 直線A_1A_2と直線A_3A_4の交点Uの座標，および直線A_1A_4と直線A_2A_3の交点Vの座標を求めよ．

(3) 3点S，U，Vが同一線上にあることを示せ．

(1) $y^2 - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ よりCは右のようになる.



$\therefore\ \ell_1 : y = 1,\quad \ell_3 : ax - \sqrt{2}a^2y + a^2 = 0$

すなわち, $\ell_3 : x - \sqrt{2}ay + a = 0$

$\therefore$ 交点 $\underline{S((\sqrt{2}-1)a,\ 1)}$ //

(2) $A_1A_2 : x = 0$, $A_3A_4 : y = \dfrac{\sqrt{2}-(-\sqrt{5})}{a-(-2a)}(x-a)+\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\ y = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3a}(x-a)+\sqrt{2}$

$\therefore\ \underline{U\left(0,\ \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}\right)}$ //

$A_1A_4 : y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2a}x + 1$ $\qquad A_2A_3 : y = \dfrac{\sqrt{2}+1}{a}x - 1$

$x = \dfrac{4a}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1}$ 有理化して. $x = a(\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+3)$

このとき. $y = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ $\qquad \therefore\ \underline{V((\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+3)a,\ \sqrt{5}+2\sqrt{2})}$ //

(3) 直線SU : $y = \dfrac{1-\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}}{(\sqrt{2}-1)a}x + \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$ $\xrightarrow{\text{有理化}}$ $\therefore$ SU : $y = \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}{3a}x + \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$

$x = (\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+3)a$ を代入すると, $y = \dfrac{(\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+3)a}{3a} + \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$

$\therefore\ y = \dfrac{10-5\sqrt{2}-2\sqrt{5}+3\sqrt{10}+5\sqrt{2}-5-\sqrt{10}+3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\sqrt{10}-2+3\sqrt{2}-\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$

$= 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$

$\therefore$ Vは直線SU上にあることが示せた $\quad \therefore$ 3点S, U, Vは同一直線上にある ▨

2017年 医学部 第4問

増田

$\boxed{4}$ ある駐車場には4つの駐車枠A，B，C，Dが，アルファベット順に1列に並んでいる．そして自動車は，4台が順に入場して，空いている枠に次の確率で駐車する．

（i）BとCのうち先着の自動車が隣の枠に駐車している枠，およびDには，等しい確率で駐車する．

（ii）Aに駐車する確率，およびBとCのうち両隣が空いている枠に駐車する確率は，（i）の確率の3倍である．

このとき，次の確率を求めよ．ただし，1台目の自動車が入場するときには，4つの枠はすべて空いている．

(1) 1台目の自動車がAに駐車する確率

(2) 3台目の自動車が入場したとき，BとDに自動車が駐車している確率

(3) 4台目の自動車が入場したとき，Cに自動車が駐車していない確率

(1) 最初の状態で、A,B,C,Dの枠それぞれに停める比率は

③	③	③	①
A	B	C	D

となる。Aに駐車する確率は $\frac{3}{3+3+3+1}=\frac{3}{10}$ //

(2)

	1台目	2台目	
2通りのどちらか	B	D	確率は $\frac{3}{10}\times\frac{1}{3+1+1}$
	D	B	確率は $\frac{1}{10}\times\frac{3}{3+3+1}$

③	X	①	①
A	B	C	D

③	③	①	X
A	B	C	D

$\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\times\frac{3}{7}=\frac{36}{350}=\frac{18}{175}$ //

(3)

	1台目	2台目	3台目	確率
6通りのいずれか	A	B	D	$\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$
		D	B	$\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$
	B	A	D	$\frac{3}{10}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}$
		D	A	$\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}$
	D	A	B	$\frac{1}{10}\times\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}$
		B	A	$\frac{1}{10}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{4}$

1台目がA

X	①	③	①
A	B	C	D

1台目B, 2台目D

③	X	①	X
A	B	C	D

6通りの確率をすべて足し合わせると求める確率は $\frac{87}{350}$ //