＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 平面上の点Oを中心とする半径1の円をCとする．円Cの内部に点Aがある．円Cの周上を2点P，Qが条件$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を満たしながら動く．線分PQの中点をRとする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$|\vec{a}| = r$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{q}$とする．ただし，$0 < r < 1$とする．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$を内積$\vec{p} \cdot \vec{q}$を用いて表せ．

(2) 直線OA上の点Bで，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$が2点P，Qの位置によらず一定であるものを求めよ．また，このときの$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$の値を$r$を用いて表せ．

（北海道大学　2017）

$\boxed{2}$ 正四面体ABCDの頂点を移動する点Pがある．点Pは，1秒ごとに，隣の3頂点のいずれかに等しい確率$\dfrac{a}{3}$で移るか，もとの頂点に確率$1-a$で留まる．初め頂点Aにいた点Pが，n秒後に頂点Aにいる確率をp_nとする．ただし，$0 < a < 1$とし，nは自然数とする．

(1) 数列$\{p_n\}$の漸化式を求めよ．

(2) 確率p_nを求めよ．

（北海道大学　2017）

$\boxed{3}$ a，bを実数とし，関数$f(x)$が

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$$

を満たすとする．

(1) $f(0)$の値をaを用いて表せ．

(2) 関数$f(x)$が$x > 1$の範囲で極大値を持つとする．このようなa，bが満たす条件を求めよ．また，点$\mathrm{P}(a,\ b)$の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

（北海道大学　2017）

$\boxed{4}$ 自然数の2乗となる数を平方数という．

(1) 自然数a，n，kに対して，$n(n+1) + a = (n+k)^2$が成り立つとき，

$$a \geqq k^2 + 2k - 1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n(n+1) + 14$が平方数となるような自然数nをすべて求めよ．

（北海道大学　2017）

$\boxed{5}$ 関数$f(x) = 1 + \sin x - x\cos x$について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$の$0 \leqq x \leqq 2\pi$における増減を調べ，最大値と最小値を求めよ．

(2) $f(x)$の不定積分を求めよ．

(3) 次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

（北海道大学　2017）

6 複素数平面上に 3 点 O，A，B を頂点とする △OAB がある．ただし，O は原点とする．△OAB の外心を P とする．3 点 A，B，P が表す複素数を，それぞれ α，β，z とするとき，

$$\alpha\beta = z$$

が成り立つとする．

(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．

（北海道大学　2017）

7 さいころを続けて投げて，数直線上の点 P を移動させるゲームを行う．初め点 P は原点 0 にいる．さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点 P を現在の位置から正の向きに移動させる．この試行を続けて行い，点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する．n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする．

(1) $p_{10} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ．

(2) p_9 の値を求めよ．

(3) p_3 の値を求めよ．

（北海道大学　2017）

8 座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 1)$，$\mathrm{C}(2,\ 2)$ を頂点とする △ABC の内部および境界を T とおく．実数 a に対して，条件

$$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2 \leqq a$$

を満たす座標平面上の点 P の全体を D とする．ただし，AP は点 A と点 P の距離を表す．

(1) D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ．

(2) D が T を含むような a の値の範囲を求めよ．

(3) (1) のもとで，D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ．

（北海道大学　2017）

9 複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円 C 上に点 z がある．a を実数の定数とし，

$$w = z^2 - 2az + 1$$

とおく．

(1) $|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ．

(2) 点 z が C 上を一周するとき，$|w|$ の最小値を a を用いて表せ．

（北海道大学　2016）

10 $a > 0$ に対し，関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{e^{-x}}{2a} + f(t)\sin t \right\} dt$$

をみたすとする．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $0 < a \leqq 2\pi$ において，

$$g(a) = \int_{-a}^{a} f(t)\sin t\, dt$$

の最小値とそのときの a の値を求めよ．

（北海道大学　2016）

北海道大学

2016年 理系 第1問

1 複素数平面上の点0を中心とする半径2の円 C 上に点 z がある．a を実数の定数とし，

$$w = z^2 - 2az + 1$$

とおく．

(1) $|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ．

(2) 点 z が C 上を一周するとき，$|w|$ の最小値を a を用いて表せ．

(1) $|w|^2 = w \cdot \overline{w}$

$= (z^2 - 2az + 1)(\overline{z}^2 - 2a\overline{z} + 1)$

$= z^2\overline{z}^2 - 2az^2\overline{z} + z^2 - 2az\overline{z}^2 + 4a^2 z\overline{z} - 2az + \overline{z}^2 - 2a\overline{z} + 1$

$= |z|^4 - 2az|z|^2 + z^2 - 2a\overline{z}|z|^2 + 4a^2|z|^2 - 2az + \overline{z}^2 - 2a\overline{z} + 1$

$|z| = 2$ であるから，

$|w|^2 = 16 - 10a(z + \overline{z}) + 16a^2 + z^2 + \overline{z}^2 + 1$

ここで，$z + \overline{z} = 2x$，$z^2 + \overline{z}^2 = (z + \overline{z})^2 - 2|z|^2 = 4x^2 - 8$ より，

$|w|^2 = 17 - 10a \cdot 2x + 16a^2 + 4x^2 - 8$

$= \underline{4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9}$ //

(2) $|w|^2 = 4(x - \frac{5}{2}a)^2 - 9a^2 + 9$

$-2 \leqq x \leqq 2$ であるから

(i) $-2 \leqq \frac{5}{2}a \leqq 2$ すなわち，$-\frac{4}{5} \leqq a \leqq \frac{4}{5}$ のとき

$|w|$ の最小値は．$\sqrt{-9a^2+9} = 3\sqrt{1-a^2}$

(ii) $\frac{5}{2}a > 2$ すなわち，$a > \frac{4}{5}$ のとき．

$|w|$ は $x = 2$ のとき．最小値 $\sqrt{(4a-5)^2} = |4a-5|$ をとる．

(iii) $\frac{5}{2}a < -2$ すなわち，$a < -\frac{4}{5}$ のとき．

$|w|$ は $x = -2$ のとき．最小値 $\sqrt{(4a+5)^2} = |4a+5|$ をとる

(i)～(iii) より，$|w|$ の最小値は

$$\begin{cases} |4a+5| & (a < -\frac{4}{5} \text{ のとき}) \\ 3\sqrt{1-a^2} & (-\frac{4}{5} \leqq a \leqq \frac{4}{5} \text{ のとき}) \\ |4a-5| & (a > \frac{4}{5} \text{ のとき}) \end{cases}$$ —— //