$\boxed{1}$ aを実数とする．座標平面内の曲線$C: y = x^3 - ax$について，以下の問いに答えよ．

(1) $a = 5$のとき，Cの接線で点$(1,\ 0)$を通るものの方程式を求めよ．

(2) Cの接線で点$(1,\ 0)$を通るものが3本存在するようなaの範囲を求めよ．

$\boxed{2}$ a を正の定数とする．曲線 $y = x^3 - ax$ を C とし，直線 $y = b$ を ℓ とする．C と ℓ がちょうど 2 点を共有しているとき，以下の問いに答えよ．

(1) b を a で表せ．

(2) $a = 3$ で b が正のとき，C と ℓ で囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{3}$ 曲線 $y=x^3\ (x>0)$ を C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における法線を ℓ とし，ℓ と y 軸の交点を Q とする．

(1) 法線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 2 点 P，Q 間の距離を t を用いて表せ．

(3) 点 P が曲線 C 上を動くとき，2 点 P，Q 間の距離の最小値を求めよ．

増田

2017年 文系 第1問

$\boxed{1}$ aを実数とする．座標平面内の曲線$C: y = x^3 - ax$について，以下の問いに答えよ．

(1) $a = 5$のとき，Cの接線で点$(1,\ 0)$を通るものの方程式を求めよ．

(2) Cの接線で点$(1,\ 0)$を通るものが3本存在するようなaの範囲を求めよ．

(1) $a=5$のとき. $y = f(x) = x^3 - 5x$

とおく。

$$f'(x) = 3x^2 - 5$$

接点のx座標をtとおくと. 接線の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x-t)$$

$$y - (t^3 - 5t) = (3t^2 - 5)(x - t) \quad \cdots(*)$$

これが$(x, y) = (1, 0)$を通るので.

$$-(t^3 - 5t) = (3t^2 - 5)(1 - t)$$

$$2t^3 - 3t^2 + 5 = 0$$

$t = -1$を代入すると成り立つため.
$(t+1)$を因数にもつ。

$$(t+1)\underbrace{(2t^2 - 5t + 5)}_{} = 0$$

判別式 $D = 25 - 4\cdot2\cdot5 < 0$
のため解なし

$$\therefore t = -1$$

$t=-1$を$(*)$に代入して

$$y - (-1+5) = (3-5)(x+1)$$

$$\underline{y = -2x + 2}$$

(2) $f(x) = x^3 - ax$ とおく。(1)と同様に. 接点のx座標をtとおくと. 接線の方程式は

$$y - (t^3 - at) = (3t^2 - a)(x - t)$$

これが$(x, y) = (1, 0)$を通るので

$$-(t^3 - at) = (3t^2 - a)(1 - t)$$

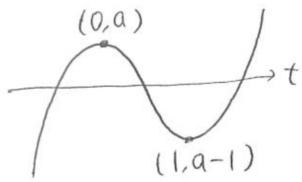
$$2t^3 - 3t^2 + a = 0$$

$g(t) = 2t^3 - 3t^2 + a$ とおき.
グラフ $y = g(t)$ が t軸と異なる3つの交点をもつ範囲を求める。

$$g'(t) = 6t^2 - 6t$$
$$= 6t(t-1)$$

$$g'(t) = 0 \iff t = 0, 1$$

$g(0) = a$
$g(1) = a - 1$



右図より.

$a > 0$ かつ $a - 1 < 0$

のとき. $y = g(t)$ は t軸と異なる3点で交わる。

$$\therefore \underline{0 < a < 1}$$

2016年 人文学部 第4問

$\boxed{4}$ aを正の定数とする．曲線$y=x^3-ax$をCとし，直線$y=b$をℓとする．Cとℓがちょうど2点を共有しているとき，以下の問いに答えよ．

(1) bをaで表せ．

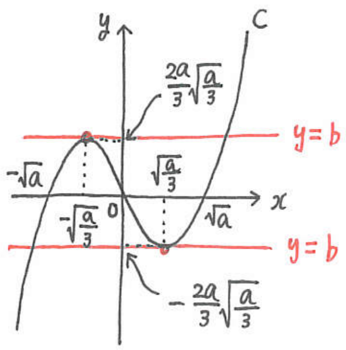
(2) $a=3$でbが正のとき，Cとℓで囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) Cにおいて，

$$y' = 3x^2 - a$$
$$= 3\left(x-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\searrow$	$-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\nearrow$

右の増減表より，グラフは右下になる．



∴ Cと$y=b$がちょうど2点を共有するのは，

$\underline{b = \pm\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}}$ 〃 のとき．

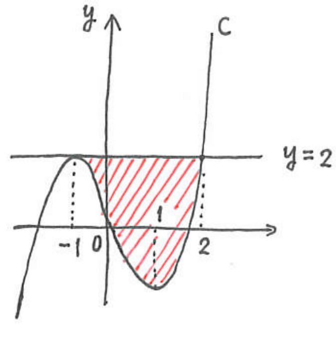
(2) $a=3$のとき，$b>0$より，$b=2$

$C: y=x^3-3x$ と $y=2$ の共有点は，

$$x^3-3x-2=0$$

$(x+1)^2(x-2)=0$ より $x=-1, 2$

∴ $(-1, 2)$ と $(2, 2)$



$$\therefore S = \int_{-1}^{2} 2-(x^3-3x)\,dx$$
$$= \left[2x-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$$
$$= 4-4+6-\left(-2-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)$$
$$= 6+\frac{3}{4}$$
$$= \underline{\frac{27}{4}}\ 〃$$

徳島大学

2016年 医（保健）・工学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 曲線 $y = x^3$ $(x > 0)$ を C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における法線を ℓ とし，ℓ と y 軸の交点を Q とする．

(1) 法線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 2点 P，Q 間の距離を t を用いて表せ．

(3) 点 P が曲線 C 上を動くとき，2点 P，Q 間の距離の最小値を求めよ．

(1) $y' = 3x^2$ より点Pにおける接線の傾きは $3t^2$，法線の傾きは $-\frac{1}{3t^2}$

$\therefore\ \ell : y = -\frac{1}{3t^2}(x - t) + t^3$

$\therefore\ \underline{\ell : y = -\frac{1}{3t^2}x + t^3 + \frac{1}{3t}}$ //

(2) (1) より．$\mathrm{Q}\left(0,\ t^3 + \frac{1}{3t}\right)$

$$\therefore\ \mathrm{PQ}^2 = (t-0)^2 + \left\{t^3 - \left(t^3 + \frac{1}{3t}\right)\right\}^2$$

$$= t^2 + \frac{1}{9t^2} \quad \cdots (*)$$

$$= \frac{9t^4+1}{9t^2}$$

$t > 0$ であるから，$\underline{\mathrm{PQ} = \frac{\sqrt{9t^4+1}}{3t}}$ //

(3) $(*)$ と $t^2 > 0$，$\frac{1}{9t^2} > 0$ より

$$\mathrm{PQ}^2 = t^2 + \frac{1}{9t^2}$$

$$\geqq 2\sqrt{t^2 \cdot \frac{1}{9t^2}} \quad \text{(相加・相乗平均の関係)}$$

$$= \frac{2}{3}$$

等号成立は．$t^2 = \frac{1}{9t^2}$ すなわち，$t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

以上より，PQの$\underline{最小値は\ \frac{\sqrt{6}}{3}\ \left(t = \frac{\sqrt{3}}{3}\ のとき\right)}$ //