______ 年　番号 ______　　氏名 ______________________________

$\boxed{1}$ xy 平面において，$kx^2+ky^2+x-y-4k+1=0$ で表される円 C があるとき，以下の問いに答えよ．ただし，k は正の実数とする．

(1) k の値によらず円 C が通る定点 A，B を求めよ．

(2) 円 C の中心 D と点 E(1, 5) を結ぶ線分 DE の長さが最小となるときの k の値と，そのときの円 C の半径 r を求めよ．

(3) k を (2) で求めた値とする．円 C 上の点 Q と点 E(1, 5) を結ぶ線分 QE の中点を P とする．点 Q が円 C 上を動くとき，△ABP の面積の最大値を求めよ．

（鳥取大学　2017）

鳥取大学

2017年 医（医） 第2問　　1枚目／2　　増田

$\boxed{2}$ xy平面において，$kx^2+ky^2+x-y-4k+1=0$で表される円Cがあるとき，以下の問いに答えよ．ただし，kは正の実数とする．

(1) kの値によらず円Cが通る定点A，Bを求めよ．

(2) 円Cの中心Dと点E(1，5)を結ぶ線分DEの長さが最小となるときのkの値と，そのときの円Cの半径rを求めよ．

(3) kを(2)で求めた値とする．円C上の点Qと点E(1，5)を結ぶ線分QEの中点をPとする．点Qが円C上を動くとき，△ABPの面積の最大値を求めよ．

(1) 与式(*)を変形

$$k(x^2+y^2-4)+(x-y+1)=0$$

これがkの値によらず成り立つには，

$$\begin{cases} x^2+y^2-4=0 & \cdots① \\ x-y+1=0 & \cdots② \end{cases}$$

であればよい。

定点A，Bは①，②が表す図形の交点。

②を①に代入して，

$$x^2+(x+1)^2-4=0$$

$$2x^2+2x-3=0$$

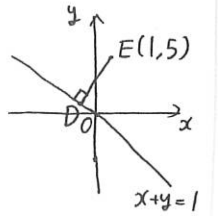
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2},\quad y=x+1=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}\ (複号同順)$$

求めるA，Bの座標は $\underline{\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2},\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right),\ \left(\frac{-1-\sqrt{7}}{2},\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)}$ //

(2) (*)を変形すると

$$k\left(x+\frac{1}{2k}\right)^2+k\left(y-\frac{1}{2k}\right)^2=\frac{1}{4k}+\frac{1}{4k}+4k-1\ \cdots(**)$$

円Cの中心Dは $\left(-\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}\right)$ つまり直線 $x+y=0$ 上にある。



線分DEが最小となるのはED⊥ODのとき。

$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{OD}=0$ より

$$\left(-\frac{1}{2k}-1,\ \frac{1}{2k}-5\right)\cdot\left(-\frac{1}{2k},\ \frac{1}{2k}\right)=0$$

$$1+2k+1-10k=0$$

$$\underline{k=\frac{1}{4}}\ //$$

そのとき円Cの半径は(**)より $r=\sqrt{\frac{1}{2k^2}+4-\frac{1}{k}}=\sqrt{8}=\underline{2\sqrt{2}}$ //

鳥取大学

2017年 医（医） 第2問　　2枚目/2　　増田

2 xy 平面において，$kx^2+ky^2+x-y-4k+1=0$ で表される円 C があるとき，以下の問いに答えよ．ただし，k は正の実数とする．

(1) k の値によらず円 C が通る定点 A，B を求めよ．

(2) 円 C の中心 D と点 E(1, 5) を結ぶ線分 DE の長さが最小となるときの k の値と，そのときの円 C の半径 r を求めよ．

(3) k を (2) で求めた値とする．円 C 上の点 Q と点 E(1, 5) を結ぶ線分 QE の中点を P とする．点 Q が円 C 上を動くとき，△ABP の面積の最大値を求めよ．

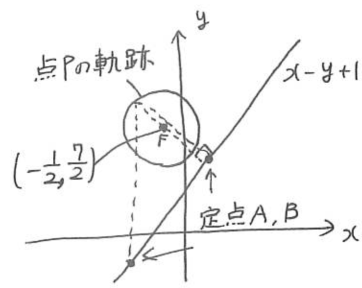
(3) $k=\frac{1}{4}$ のとき、円Cは $(x+2)^2+(y-2)^2=8$

点Qの座標を (a, b) とおくと

$(a+2)^2+(b-2)^2=8$ …③

点PはEQの中点なので $P\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+5}{2}\right)$

$\frac{a+1}{2}=x$，$\frac{b+5}{2}=y$ とおく。



$a=2x-1$，$b=2y-5$ を③に代入して

$(2x+1)^2+(2y-7)^2=8$

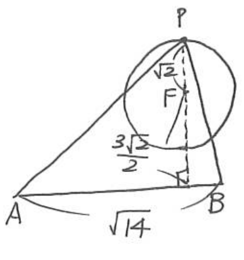
$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=2$

よって点Pは 点 $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の円の軌跡上にある。

△ABPの面積が最大となるのは、(PFを通る直線) ⊥ (ABを通る直線) のときである。

点Fから直線 $x-y+1=0$ に下ろした垂線の長さは

$$\frac{\left|-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}+1\right|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$



また線分ABの長さは

$\sqrt{7+7}=\sqrt{14}$

△ABPの面積の最大値は $\frac{1}{2}\times\sqrt{14}\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)=\frac{5\sqrt{7}}{2}$ //