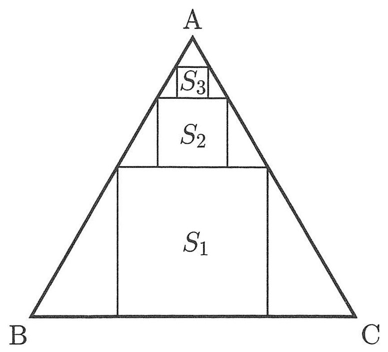
______ 年　番号 ______　　氏名 ______________________________

$\boxed{1}$ 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC に，図のように正方形 S_1，S_2，S_3，$\cdots$ を順に内接させるものとする．



(1) 正方形 S_1 の 1 辺の長さを求めよ．

(2) n 番目の正方形 S_n の面積 s_n を求めよ．

(3) これらの正方形の面積の総和

$$s = s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$$

を求めよ．

（日本女子大学　2014）

$\boxed{2}$ 以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $y = \dfrac{2}{e^x + 1}$ の逆関数を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(2) 方程式 $\log_2 x + 2x^2 - 10x + 9 = 0$ は，$1 < x < 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ．

(3) t を実数の定数とし，i を虚数単位とする．3 つの複素数 α，β，γ を

$$\alpha = t + 2i, \quad \beta = (3t+4) + (t^2+6)i, \quad \gamma = (t+2) + 5i$$

とする．複素数平面上の 3 点 α，β，γ が同一直線上にあるときの t をすべて求めよ．

（茨城大学　2017）

0001878631218999

日本女子大学

2014年 理学部 第1問

数理 石井K

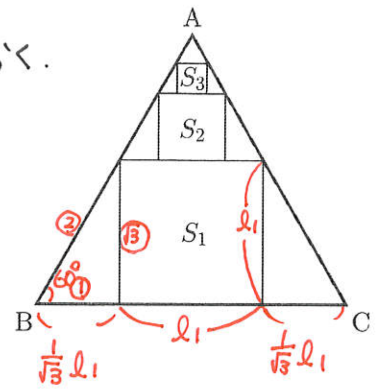
$\boxed{1}$ 1辺の長さが1の正三角形ABCに，図のように正方形 S_1，S_2，S_3，… を順に内接させるものとする．

(1) S_n の1辺の長さを l_n とおく．

右図より．

$$l_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} l_1 = 1$$

$$\therefore \underline{l_1 = 2\sqrt{3} - 3}$$



(1) 正方形 S_1 の1辺の長さを求めよ．

(2) n 番目の正方形 S_n の面積 s_n を求めよ．

(3) これらの正方形の面積の総和

$$s = s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$$

を求めよ．

(2) (1)と同様にすると．

$$l_{n+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} l_{n+1} = l_n$$

$$\therefore l_{n+1} = (2\sqrt{3} - 3) l_n$$

$\therefore \{l_n\}$ は初項 $2\sqrt{3}-3$，公比 $2\sqrt{3}-3$ の等比数列となる．$\therefore l_n = (2\sqrt{3}-3)^n$

$$\therefore \underline{S_n = l_n^2 = (2\sqrt{3}-3)^{2n}}$$

(3)

$$S = (2\sqrt{3}-3)^2 + (2\sqrt{3}-3)^4 + \cdots$$

$0 < 2\sqrt{3} - 3 < 1$ より，$0 < (2\sqrt{3}-3)^2 < 1$

$$S = \frac{(2\sqrt{3}-3)^2}{1-(2\sqrt{3}-3)^2}$$

$$= \frac{21 - 12\sqrt{3}}{12\sqrt{3} - 20}$$

$$= \underline{\frac{3(\sqrt{3}-1)}{8}}$$

茨城大学

2017年 工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $y = \dfrac{2}{e^x + 1}$ の逆関数を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(2) 方程式 $\log_2 x + 2x^2 - 10x + 9 = 0$ は，$1 < x < 4$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ．

(3) t を実数の定数とし，i を虚数単位とする．3つの複素数 α，β，γ を

$$\alpha = t + 2i, \quad \beta = (3t+4) + (t^2+6)i, \quad \gamma = (t+2) + 5i$$

とする．複素数平面上の3点 α，β，γ が同一直線上にあるときの t をすべて求めよ．

(1) $0 < e^x$ より．$0 < y < 2$

x と y を入れかえて．$x = \dfrac{2}{e^y + 1}$

$\therefore\ e^y + 1 = \dfrac{2}{x}$

$\therefore\ e^y = \dfrac{2}{x} - 1$

$\therefore\ \underline{y = \log\left(\dfrac{2}{x} - 1\right) \quad (0 < x < 2)}$ //

(2) $f(x) = \log_2 x + 2x^2 - 10x + 9$ とおくと．

$f(1) = 0 + 2 - 10 + 9 = 1 > 0$

$f(4) = 2 + 32 - 40 + 9 = 3 > 0$

$f(2) = 1 + 8 - 20 + 9 = -2 < 0$

$\therefore$ $1 < x < 2$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ

$\therefore$ $1 < x < 4$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ ▨

(3) $\beta - \alpha = k(\gamma - \alpha)$ をみたす実数 k が存在すればよい

$\therefore\ (2t+4) + (t^2+4)i = k\{2 + 3i\}$

$$\therefore \begin{cases} 2t + 4 = 2k \\ t^2 + 4 = 3k \end{cases} \iff \begin{cases} k = t + 2 \\ t^2 + 4 = 3k \end{cases}$$

$t^2 + 4 = 3t + 6$

$\therefore\ t^2 - 3t - 2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \underline{t = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}}$ //