

1 1辺の長さが1の正四面体PABCにおいて、辺PA, BC, PB, ACの midpointをそれぞれK, L, M, Nとする。線分KL, MNの midpointをそれぞれQ, Rとし、 $\triangle ABC$ の重心をGとする。また、 $\vec{PA} = \vec{a}$ ,  $\vec{PB} = \vec{b}$ ,  $\vec{PC} = \vec{c}$ とおく。

- (1)  $\vec{PQ}$ ,  $\vec{PR}$ を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表し、点QとRが一致することを示しなさい。
- (2) 3点P, Q, Gが同一直線上にあることを示しなさい。また、PQ:QGを求めなさい。
- (3)  $PG \perp AB$ を示しなさい。



2017年 経済学部 第1問

増田

1 1辺の長さが1の正四面体PABCにおいて、辺PA, BC, PB, ACの中点をそれぞれK, L, M, Nとする。線分KL, MNの中点をそれぞれQ, Rとし、 $\triangle ABC$ の重心をGとする。また、 $\vec{PA} = \vec{a}$ ,  $\vec{PB} = \vec{b}$ ,  $\vec{PC} = \vec{c}$ とおく。

- (1)  $\vec{PQ}$ ,  $\vec{PR}$ を $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ を用いて表し、点QとRが一致することを示しなさい。  
 (2) 3点P, Q, Gが同一直線上にあることを示しなさい。また、PQ:QGを求めなさい。  
 (3)  $PG \perp AB$ を示しなさい。

(1) QはKLの中点なので

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \frac{\vec{PK} + \vec{PL}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \right) \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}\end{aligned}$$

RはMNの中点なので

$$\begin{aligned}\vec{PR} &= \frac{\vec{PM} + \vec{PN}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{b}}{2} + \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} \right) \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}\end{aligned}$$

$\vec{PQ} = \vec{PR}$ となり、点QとRは一致することが示された。

- (2) 3点P, Q, Rが同一直線上にある  
 $\Leftrightarrow \vec{PQ} = k\vec{PG}$ となる実数kがある

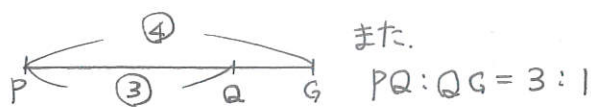
$$\vec{PQ} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}$$

Gは $\triangle ABC$ の重心なので

$$\vec{PG} = \frac{\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$\vec{PQ} = \frac{3}{4}\vec{PG}$ と表されるので、3点P, Q,

Gは同一直線上にあることが示された。



- (3)  $PG \perp AB \Leftrightarrow \vec{PG} \cdot \vec{AB} = 0$   
 ただし  $\vec{PG} \neq 0, \vec{AB} \neq 0$

$$\vec{PG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$\vec{AB} = \vec{PB} - \vec{PA} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\begin{aligned}\vec{PG} \cdot \vec{AB} &= \frac{1}{3} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{3} (\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &\quad + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= \frac{1}{3} (-|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a})\end{aligned}$$

ここで、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ$ だから、

括弧内かすべてキャンセルして

$$\vec{PG} \cdot \vec{AB} = 0$$

いま、P, G, A, Bはすべて異なる点なので

$$\vec{PG} \neq 0, \vec{AB} \neq 0$$

よって  $\vec{PG} \perp \vec{AB}$