

1 次の問に答えよ。

(1) a, b を正の実数とするとき, 極限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(\sqrt{a^2 x^2 + b} - ax)$$

を求めよ。

(2) 複素数

$$z = 1 + \sqrt{3}i, \quad w = \frac{1}{-1 + i}$$

に対して, $z^8 w^7$ の絶対値 r と偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を求めよ。ただし, i は虚数単位である。

(学習院大学 2017)

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 4x}{x + \sin x}$ の値を求めよ.

(自治医科大学 2017)

3 以下の各問に答えよ。ただし、対数は自然対数であり、 e は自然対数の底である。

(1) 次の極限を調べよ。

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-x} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} (3^x - \sqrt{9^x - 3^x})$$

(2) 関数 $y = \log \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ を微分せよ。

(3) 次の定積分を求めよ。

$$(i) \int_{-2}^0 (x-4)(x+2)^5 dx \quad (ii) \int_0^1 x e^{x+1} dx$$

(茨城大学 2017)

4 n を自然数とする. このとき, 次の問いに答えなさい.

(1) $a > 0$, $n \geq 3$ のとき, 次の不等式が成り立つことを証明しなさい.

$$(1+a)^n > \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$$

(2) $r > 1$ のとき, 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{r^n}$$

を求めなさい.

(山口大学 2016)

5 2つの数列 $\{\theta_n\}$, $\{a_n\}$ を漸化式

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_{n+1} = \frac{\pi - \theta_n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{|2 - a_n|} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ. また $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ.
- (2) $\cos \theta_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_n}{2}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ.
- (3) $2 \cos \theta_n = a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の値を求めよ.

(宮城教育大学 2016)

2017年 医学部 第17問

増田

 17 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 4x}{x + \sin x}$ の値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 4x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot 4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x}}{1 + \frac{\sin x}{x}}$$

 ここで $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いると、

$$(\text{与式}) = \frac{3 \cdot 4 \cdot 1}{1 + 1} = \underline{\underline{6}}$$

(別解) ロピタルの定理より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 4x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 \sin 4x)'}{(x + \sin x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 \cos 4x}{1 + \cos x}$$

$$= 6$$

 マークシート式で答のみ求められているなら、
 ロピタルの定理を使って
 求めた方が時短になることも!



2016年工・理・教育第2問

数理
石井K2 n を自然数とする。このとき、次の問いに答えなさい。(1) $a > 0$, $n \geq 3$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

$$(1+a)^n > \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$$

(2) $r > 1$ のとき、極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{r^n}$$

を求めなさい。

(1) 二項定理より、 $(1+a)^n = \sum_{k=0}^n {}^nC_k \cdot a^k$

$$\therefore (1+a)^n = \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{na}_{k=1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} \cdot a^2}_{k=2} + \underbrace{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3}_{k=3 \text{ のとき}} + (\text{その他の正の項})$$

 $a > 0$, $n \geq 3$ であるから、 $(1+a)^n > \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$ が成り立つ \square (2) $a = r - 1 (> 0)$ とおくと (1) より

$$r^n > \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(r-1)^3$$

よって、

$$0 < \frac{n^2}{r^n} < \frac{6n}{(n-1)(n-2)(r-1)^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{(n-1)(n-2)(r-1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{n}}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(r-1)^3} = 0$$

よって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{r^n} = 0$$