______年　番号______　氏名______________________________

$\boxed{1}$ 次の問に答えよ．

(1) a, b を正の実数とするとき，極限

$$\lim_{x\to\infty} x\sin(\sqrt{a^2x^2+b}-ax)$$

を求めよ．

(2) 複素数

$$z=1+\sqrt{3}i,\quad w=\frac{1}{-1+i}$$

に対して，z^8w^7 の絶対値 r と偏角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

（学習院大学　2017）

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3\sin 4x}{x + \sin x}$ の値を求めよ．

（自治医科大学　2017）

$\boxed{3}$ 以下の各問に答えよ．ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1) 次の極限を調べよ．

（ i ） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-x}$　　（ii） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3^x-\sqrt{9^x-3^x}\right)$

(2) 関数 $y=\log\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ を微分せよ．

(3) 次の定積分を求めよ．

（ i ） $\displaystyle\int_{-2}^{0}(x-4)(x+2)^5\,dx$　　（ii） $\displaystyle\int_{0}^{1}xe^{x+1}\,dx$

（茨城大学　2017）

$\boxed{4}$ nを自然数とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $a>0$，$n \geqq 3$のとき，次の不等式が成り立つことを証明しなさい．

$$(1+a)^n > \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$$

(2) $r>1$のとき，極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{r^n}$$

を求めなさい．

（山口大学　2016）

$\boxed{5}$ 2つの数列 $\{\theta_n\}$，$\{a_n\}$ を漸化式

$$\theta_1=\frac{\pi}{4},\quad \theta_{n+1}=\frac{\pi-\theta_n}{2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

$$a_1=\sqrt{2},\quad a_{n+1}=\sqrt{|2-a_n|}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定義するとき，次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ．また $0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(2) $\cos\theta_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta_n}{2}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(3) $2\cos\theta_n=a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ の値を求めよ．

（宮城教育大学　2016）

自治医科大学

2017年 医学部 第17問

増田

$\boxed{17}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 4x}{x+\sin x}$ の値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 4x}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 4\cdot\frac{\sin 4x}{4x}}{1+\frac{\sin x}{x}}$$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いると、

$$(与式)=\frac{3\cdot 4\cdot 1}{1+1}=\underline{6}$$

別解　ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 4x}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3\sin 4x)'}{(x+\sin x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{12\cos 4x}{1+\cos x}$$

$$=6$$

マークシート式で答のみ求められているなら、ロピタルの定理を使って求めた方が時短になることも！

2016年 工・理・教育 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ nを自然数とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $a>0$，$n \geqq 3$のとき，次の不等式が成り立つことを証明しなさい．

$$(1+a)^n > \underbrace{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3}_{={}_nC_3}$$

(2) $r>1$のとき，極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{r^n}$$

を求めなさい．

(1) 二項定理より，$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot a^k$

$$\therefore (1+a)^n = \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{na}_{k=1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}\cdot a^2}_{k=2} + \underbrace{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3}_{k=3\text{のとき}} + (\text{その他の正の項})$$

$a>0$，$n \geqq 3$であるから，$(1+a)^n > \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$ が成り立つ ▨

(2) $a=r-1\ (>0)$とおくと(1)より

$$r^n > \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(r-1)^3$$

よって，

$$0 < \frac{n^2}{r^n} < \frac{6n}{(n-1)(n-2)(r-1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{(n-1)(n-2)(r-1)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{n}}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(r-1)^3} = 0$$

よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{r^n} = 0$$

//