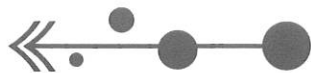


1 a を実数とする. x の 2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ の区間 $a - 1 \leq x \leq a + 1$ における最小値を $m(a)$ とする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) $m\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ.
- (2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ.
- (3) a が実数全体を動くとき, $m(a)$ の最小値を求めよ.

(岡山大学 2017)



2017年文系第3問

増田

3 a を実数とする. x の2次関数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ の区間 $a-1 \leq x \leq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) $m\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ.
 (2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ.
 (3) a が実数全体を動くとき, $m(a)$ の最小値を求めよ.

(1) $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ の区間 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ における最小値を求めよ.

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 1 - \frac{1}{16}$$

$$= \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}$$

$f(x)$ は $x = -\frac{1}{4}$ のとき最小値 $\frac{15}{16}$ をとる.

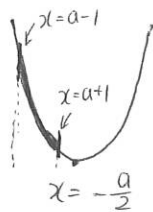
$$\therefore m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16}$$

(2) $f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{4}$

区間が頂点 $x = -\frac{a}{2}$

より左にあるか, 右に

あるか, 頂点を含むかで (左にある場合) 場合分けする.



i) $a+1 < -\frac{a}{2}$ つまり $a < -\frac{2}{3}$ のとき

$$m(a) = f(a+1)$$

$$= (a+1)^2 + a(a+1) + 1$$

$$= 2a^2 + 3a + 2$$

ii) $-\frac{a}{2} \leq a-1$ つまり $a \geq \frac{2}{3}$ のとき

$$m(a) = f(a-1)$$

$$= (a-1)^2 + a(a-1) + 1$$

$$= 2a^2 - 3a + 2$$

iii) $-\frac{2}{3} \leq a < \frac{2}{3}$ のとき (頂点が最小)

$$m(a) = f\left(-\frac{a}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{a^2}{4}$$

以上より

$$m(a) = \begin{cases} 2a^2 + 3a + 2 & (a < -\frac{2}{3}) \\ 1 - \frac{a^2}{4} & (-\frac{2}{3} \leq a < \frac{2}{3}) \\ 2a^2 - 3a + 2 & (a \geq \frac{2}{3}) \end{cases}$$

(3) $m'(a) = \begin{cases} 4a + 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4} \text{で最小} \\ -\frac{a}{2} \Rightarrow a = 0 \text{で最大} \\ 4a - 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \text{で最小} \end{cases}$

$m(a)$ は区間の境界 ($a = \pm \frac{2}{3}$) で

たまたまかにつながっているのて、

最小値の候補は $m\left(-\frac{3}{4}\right)$ か $m\left(\frac{3}{4}\right)$

$$m\left(-\frac{3}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 2$$

$$= \frac{7}{8}$$

$$m\left(\frac{3}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + 2$$

$$= \frac{7}{8}$$

よって $m(a)$ の最小値は $\frac{7}{8}$

このとき $a = \pm \frac{3}{4}$