

1 実数  $a, b$  に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a \cos 2\theta + b \cos \theta$$

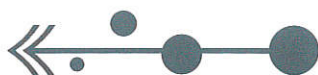
とし,  $0 < \theta < \pi$  で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos \theta - 1}$$

を考える.

- (1)  $f(\theta)$  と  $g(\theta)$  を  $x = \cos \theta$  の整式で表せ.
- (2)  $g(\theta)$  が  $0 < \theta < \pi$  の範囲で最小値 0 をとるための  $a, b$  についての条件を求めよ. また, 条件をみたす点  $(a, b)$  が描く図形を座標平面上に図示せよ.

(東京大学 2017)



2017年理系第1問

1 実数  $a, b$  に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a \cos 2\theta + b \cos \theta$$

とし,  $0 < \theta < \pi$  で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos \theta - 1}$$

を考える.

(1)  $f(\theta)$  と  $g(\theta)$  を  $x = \cos \theta$  の整式で表せ.(2)  $g(\theta)$  が  $0 < \theta < \pi$  の範囲で最小値 0 をとるための  $a, b$  についての条件を求めよ. また, 条件をみたす点  $(a, b)$  が描く図形を座標平面上に図示せよ.

$$(1) f(\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + a(2 \cos^2 \theta - 1) + b \cos \theta$$

$$= 4 \cos^3 \theta + 2a \cos^2 \theta + (b-3) \cos \theta - a$$

$$= \frac{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a}{x-1} //$$

$$g(\theta) = \frac{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a - (1+a+b)}{x-1}$$

$$= \frac{4x^2 + 2(a+2)x + 2a+b+1}{x-1} //$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 + (2a+4)x + 2a+b+1 \\ x-1 \overline{) 4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - 2a - b - 1} \\ \underline{4x^3 - 4x^2} \phantom{+ (b-3)x - 2a - b - 1} \\ (2a+4)x^2 + (b-3)x \phantom{- 2a - b - 1} \\ \underline{(2a+4)x^2 - (2a+4)x} \phantom{- 2a - b - 1} \\ (2a+b+1)x - 2a - b - 1 \\ \underline{(2a+b+1)x - 2a - b - 1} \\ 0 \end{array}$$

(2)  $0 < \theta < \pi$  より,  $-1 < x < 1$ 

$$g(\theta) = 4 \left( x + \frac{a+2}{4} \right)^2 - \frac{(a+2)^2}{4} + 2a+b+1$$

$$= 4 \left( x + \frac{a+2}{4} \right)^2 - \frac{1}{4}a^2 + a + b$$

\* 最小値をもつのは,  $-1 < x < 1$  より頂点がこの区間に含まれる場合のみである.

∴ 最小値 0 をとるのは,  $-1 < -\frac{a+2}{4} < 1$  かつ  $-\frac{1}{4}a^2 + a + b = 0$  のとき

$$\therefore -6 < a < 2 \text{ かつ } b = \frac{1}{4}a^2 - a$$

$$\therefore \text{求める条件は, } b = \frac{1}{4}a^2 - a \text{ } (-6 < a < 2) //$$

$$b = \frac{1}{4}(a-2)^2 - 1 \text{ より } (a, b) \text{ が描く図形は}$$

右のようになる.

ただし, 両端点は含まない

