$\boxed{1}$ $0<\theta<\pi$ とする．単位円の周上の 3 点 A(1，0)，B($\cos\theta$，$\sin\theta$)，C($\cos 2\theta$，$\sin 2\theta$) を頂点とする △ABC の面積を θ を用いて表せ．また，△ABC の面積の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

$\boxed{2}$ $a>0$ とする．$x>0$ で定義された関数 $y=x^2+ax-3a^2\log x$ のグラフが x 軸と共有点をもつような a の範囲を求めよ．

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ．

(1) $y=xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ $(-2\leqq x\leqq 2)$ の増減および極値を調べ，このグラフの概形をかけ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$ を求めよ．

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$ のグラフの概形をかけ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx$ を求めよ．

群馬大学

2016年 理工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $0 < \theta < \pi$ とする．単位円の周上の3点 A(1, 0)，B($\cos\theta$, $\sin\theta$)，C($\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$) を頂点とする △ABC の面積を θ を用いて表せ．また，△ABC の面積の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

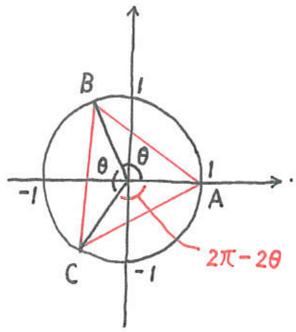
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\theta + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\theta + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin(2\pi - 2\theta)$$

$$= \sin\theta + \frac{1}{2}\sin(-2\theta)$$

$$= \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$= \sin\theta - \sin\theta\cos\theta$$

$$= \underline{\sin\theta(1-\cos\theta)}\ //$$



△ABC の面積を $f(\theta)$ で表すと，

$$f'(\theta) = \cos\theta(1-\cos\theta) + \sin\theta\cdot\sin\theta$$

$$= \cos\theta - \cos^2\theta + 1 - \cos^2\theta$$

$$= -2\cos^2\theta + \cos\theta + 1$$

$$= -(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1)$$

$0 < \theta < \pi$ より，$\cos\theta - 1 < 0$ であり

増減表は右のようになる．

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	(0)

∴ △ABC の面積の最大値は $\underline{\frac{3\sqrt{3}}{4}\ \left(\theta = \frac{2}{3}\pi \text{ のとき}\right)}\ //$

兵庫県立大学

2016年 工学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ $a>0$ とする．$x>0$ で定義された関数 $y=x^2+ax-3a^2\log x$ のグラフが x 軸と共有点をもつような a の範囲を求めよ．

$$y' = 2x+a-\frac{3a^2}{x}$$
$$= \frac{2x^2+ax-3a^2}{x}$$
$$= \frac{(2x+3a)(x-a)}{x}$$

x	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$	(∞)
y'		$-$		$+$	
y	(∞)	$\searrow$		$\nearrow$	

$y'=0$ となるのは，$x>0$，$a>0$ より，$x=a$ のとき

増減表より，最小値は $2a^2-3a^2\log a$

∴ x軸と共有点をもつのは，

$2a^2-3a^2\log a \leqq 0$ のとき

∴ $a^2(2-3\log a)\leqq 0$

$a>0$ より，$a^2>0$ であるから，$2-3\log a\leqq 0$

∴ $\log a \geqq \frac{2}{3}$

∴ $\underline{a \geqq e^{\frac{2}{3}}}$ //

2016年 教育・生物資源 第4問

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ．

(1) $y = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ の増減および極値を調べ，このグラフの概形をかけ．

(2) $\int_0^1 xe^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$ を求めよ．

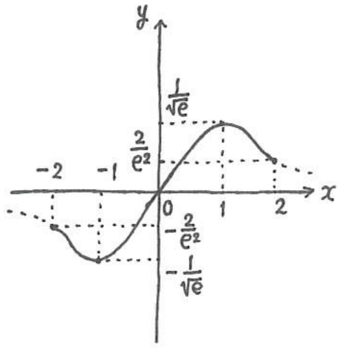
x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\frac{2}{e^2}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘	$\frac{2}{e^2}$

(1) $y' = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + x \cdot (-xe^{-\frac{1}{2}x^2})$

$= (1+x)(1-x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$

∴ 増減表は右上のようになり，

グラフは右のようになる．



(2) (与式) $= \int_0^1 \left(-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)' dx$

$= \left[-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_0^1$

$= -\frac{1}{\sqrt{e}} - (-1)$

$= \underline{1 - \frac{1}{\sqrt{e}}}$ //

2016年 理系 第1問

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$ のグラフの概形をかけ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx$ を求めよ．

(1) $y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}$

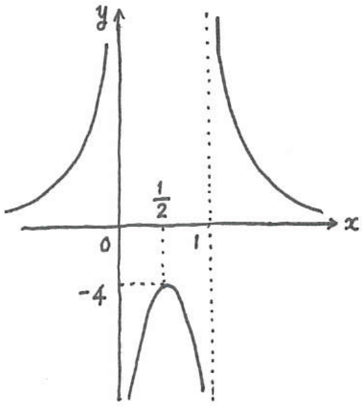
$= \dfrac{(x-1)^2-x^2}{x^2(x-1)^2}$

$= \dfrac{-2x+1}{x^2(x-1)^2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	↗		↗	-4	↘		↘

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} y=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0} y=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-0} y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to1+0} y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to1-0} y=-\infty$

∴ グラフの概形は右のようになる．



(2) $t=2-x$ として置換積分する．

$dt=-dx$，

x	$1\to2$
t	$1\to0$

(与式) $=\displaystyle\int_1^0 (2-t)\sqrt{t}\cdot(-dt)$

$=\displaystyle\int_0^1 2t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\,dt$

$=\left[\dfrac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$

$=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{5}$

$=\underline{\dfrac{14}{15}}$ //