

1 座標平面上の3点  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(x, y)$  を考える. ただし  $y > 0$  とする. 次の問いに答えよ.

- (1)  $\triangle ABC$  が二等辺三角形であるとする. そのとき  $x, y$  が満たす条件を求め, 点  $C$  の存在範囲を図示せよ.
- (2)  $\triangle ABC$  が鋭角三角形であるとする. そのとき  $x, y$  が満たす条件を求め, 点  $C$  の存在範囲を図示せよ.
- (3) 3つの角  $\angle CAB, \angle ABC, \angle BCA$  をそれぞれ  $\alpha, \beta, \gamma$  とし, 不等式

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする. そのとき  $x, y$  が満たす条件を求め, 点  $C$  の存在範囲を図示せよ.

- (4)  $x, y$  が (3) の条件を満たすとき,  $\gamma$  がとりうる値の範囲を求めよ.

(広島大学 2009)

2 曲線  $y = e^x$  上の点  $A(0, 1)$  における接線を  $l$  とし, 点  $B(0, 2)$  を通り直線  $l$  に平行な直線を  $m$  とする. 直線  $m$  と曲線  $y = e^x$  の2つの交点  $P, Q$  の  $x$  座標をそれぞれ  $\alpha, \beta$  (ただし  $\alpha < \beta$ ) とする. 直線  $x = \alpha$  と直線  $l$  の交点を  $P'$ , 直線  $x = \beta$  と直線  $l$  の交点を  $Q'$  とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 平行四辺形  $PP'Q'Q$  の面積  $S$  を  $\alpha, \beta$  で表せ.
- (2) 直線  $m$  と曲線  $y = e^x$  によって囲まれる図形の面積  $T$  を  $\alpha, \beta$  の多項式で表せ.
- (3) 線分  $PQ$  の中点  $R$  は第2象限にあることを示せ.
- (4)  $\alpha + \beta > -1$  であることを示せ.

(広島大学 2009)

3 四面体 OABC において,

$$\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{2}, \angle BOC = \frac{\pi}{3}, OA = OB = 2, OC = 1$$

とする. 3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え,  $\vec{OP} = \vec{p}$  とする.  
 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$  とするとき,  $\vec{p}$  は実数  $s, t$  を用いて

$$\vec{p} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

と表される. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 内積  $\vec{p} \cdot \vec{a}, \vec{p} \cdot \vec{b}, \vec{p} \cdot \vec{c}$  を  $s, t$  を用いて表せ.
- (2) 点 P が  $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$  を満たすとき,  $s, t$  の値を求めよ.
- (3) (2) の条件を満たす点 P について, 直線 AP と直線 BC の交点を Q, 直線 BP と直線 AC の交点を R とする. BQ : QC および AR : RC を求めよ.
- (4) (2) の条件を満たす点 P について, 3 つの四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積の比を求めよ.

(広島大学 2009)

4 2 人のプレイヤー A, B が対戦を繰り返すゲームを行う. 1 回の対戦につき A が勝つ確率は  $p$  であり, B が勝つ確率は  $1-p$  であるとする (ただし  $0 < p < 1$ ). A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている. 1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る. 対戦を繰り返して一方のプレイヤーがすべての金貨を手に入れたとき, ゲームを終了する. ちょうど  $n$  回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を  $P_n$  とする. ただし  $n$  は自然数とする.

- (1)  $P_4$  を求めよ.
- (2)  $P_{2n-1}$  を求めよ.
- (3)  $P_{2n}$  を求めよ.
- (4)  $2n$  回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率  $S_n$  を求めよ.
- (5)  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  とする.  $p$  と  $S$  の大小関係を調べよ.

(広島大学 2009)

5 次の問いに答えよ. ただし,  $n$  は自然数を表す.

(1)  $0 \leq x \leq 1$  を満たす実数  $x$  に対して, 不等式

$$\frac{x}{n+1} \leq \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$$

が成り立つことを示せ. ただし, 対数は自然対数とする.

(2) 次の値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3) 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_n = \left(1 + \frac{1^5}{n^6}\right) \left(1 + \frac{2^5}{n^6}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^5}{n^6}\right)$$

で定めるとき, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ.

(広島大学 2008)

6 2点 A, B と, その上を動く 1 個の石がある. この石は, 時刻  $t=0$  では点 A にあり, その後, 次の規則 (a), (b) にしたがって動く.

各  $t=0, 1, 2, \dots$  に対して,

(a) 時刻  $t$  に石が点 A にあれば, 時刻  $t+1$  に石が点 A にある確率は  $c$ , 点 B にある確率は  $1-c$  である.

(b) 時刻  $t$  に石が点 B にあれば, 時刻  $t+1$  に石が点 B にある確率は  $2c$ , 点 A にある確率は  $1-2c$  である.

ただし,  $c$  は  $0 < c < \frac{1}{2}$  を満たす定数とする.

いま,  $n$  を自然数とし, 時刻  $t=n$  において石が点 A にある確率を  $p_n$  とするとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $p_1, p_2$  を求めよ.

(2)  $p_{n+1}$  を  $p_n$  と  $c$  を用いて表せ.

(3)  $p_n$  を求めよ.

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  を求めよ.

(広島大学 2008)

7 平面上のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  は、その大きさがともに  $\sqrt{2}$  であり、なす角が  $120^\circ$  である。このとき、次の問いに答えよ。

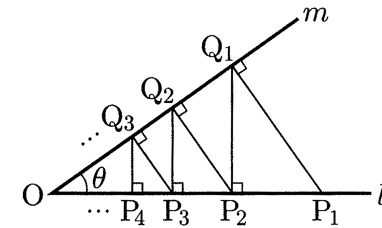
- (1) 内積  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$  を求めよ。
- (2)  $k, l$  を整数とすると、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$  は偶数であることを示せ。
- (3) (2) で、 $k$  または  $l$  が奇数のとき、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$  は 4 の倍数ではないことを示せ。
- (4)  $m, n$  が整数であり、 $m = n = 0$  ではないならば、 $|m\vec{a} + n\vec{b}|$  は整数ではないことを示せ。

(広島大学 2008)

8 下図のように、点  $O$  から出る 2 本の半直線  $l, m$  があり、 $l$  と  $m$  のなす角を  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) とする。 $l$  上に  $OP_1 = 1$  となるように点  $P_1$  を定め、

$P_1$  から  $m$  に垂線  $P_1Q_1$  を下ろし、  
 $Q_1$  から  $l$  に垂線  $Q_1P_2$  を下ろし、  
 $P_2$  から  $m$  に垂線  $P_2Q_2$  を下ろし、  
 $Q_2$  から  $l$  に垂線  $Q_2P_3$  を下ろす。

同様にくりかえして、点  $P_n, Q_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ) を定め、三角形  $P_nQ_nP_{n+1}$  の面積を  $S_n$  とする。



次の問いに答えよ。

- (1)  $\frac{P_2Q_2}{P_1Q_1}$  を求めよ。
- (2)  $\frac{S_2}{S_1}$  を求めよ。
- (3)  $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$  を求め、 $\sin 2\theta$  と  $\cos 2\theta$  を用いて表せ。
- (4) (3) で求めた  $S$  を  $\theta$  の関数と考えて、 $S$  の最大値を求めよ。ただし、その最大値を与える  $\theta$  の値は求めなくてよい。

(広島大学 2008)

9 座標空間の2点  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, -1, 0)$  および

$$\vec{u} = (-1, 2, 5), \quad \vec{v} = (1, 1, 1), \quad \vec{w} = (-1, 3, 1)$$

と成分表示される3つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{AP}$  と  $\vec{u}$  が平行かつ  $\vec{BP}$  と  $\vec{v}$  が平行となるような点  $P$  の座標を求めよ。
- (2) 上で求めた点  $P$  に対し、 $\vec{CP}$  と  $\vec{w}$  が直交するような点  $C(0, 0, c)$  を求めよ。
- (3) 上で求めた点  $P$  と  $C$  に対し、 $P$  は3点  $A, B, C$  の定める平面上にあることを示せ。

(広島大学 2007)

10  $f(x) = \frac{8x+21}{3x+8}$  とおく。次の問いに答えよ。

- (1)  $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$  であることを示せ。
- (2)  $x \geq 0$  ならば  $f(x) \geq 2$  であることを示せ。
- (3)  $x \geq 2, y \geq 2$  ならば

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{100}$$

となることを示せ。

- (4)  $x \geq 2$  ならば

$$|f(f(x)) - \sqrt{7}| \leq \frac{|x - \sqrt{7}|}{10000}$$

となることを示し、これを用いて  $|r - \sqrt{7}| < 10^{-4}$  を満たす有理数  $r$  を1つ求めよ。

(広島大学 2007)

11  $0 < b < a$  を満たす定数  $a, b$  に対し、2つの楕円

$$A: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad B: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

を考える。また  $\alpha, \beta$  は

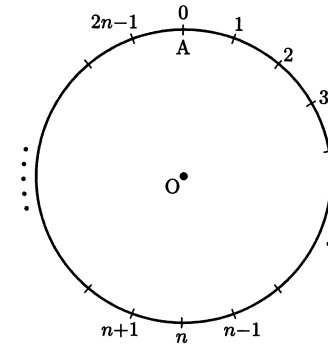
$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

を満たす  $0$  と  $\frac{\pi}{2}$  の間の実数とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  を示せ。
- (2) 2つの楕円  $A, B$  の第1象限にある交点の座標を求めよ。
- (3) 楕円  $A$  で囲まれる図形と楕円  $B$  で囲まれる図形の共通部分のうち、 $x \geq 0, y \geq 0$  の範囲にある部分の面積  $S$  を  $a, b, \beta$  を用いて表せ。

(広島大学 2007)

12  $n$  を2以上の整数とする。中心を  $O$  とする円の周を  $2n$  等分して、図のように  $0$  から  $2n-1$  までの目盛りを付ける。目盛りが  $0$  の点を  $A$  とする。一方、袋の中に  $1$  から  $2n-1$  までの整数を書いた玉がそれぞれ1個ずつ入っている。この袋から玉を2つ取り出して、玉に書かれた数と同じ目盛りを持つ2点をとる。2点のうち、目盛りの大きい方を  $B$ 、目盛りの小さい方を  $C$  とし、 $\triangle ABC$  を考える。次の問いに答えよ。



- (1) 辺  $BC$  上に点  $O$  がある場合は何通りあるか。
- (2)  $\triangle ABC$  の辺上に点  $O$  がある確率を求めよ。
- (3)  $\triangle ABC$  の内部に点  $O$  がある確率は  $\frac{n-2}{2(2n-1)}$  であることを示せ。
- (4)  $\triangle ABC$  の辺上に点  $O$  があるとき  $X = 1$ 、 $\triangle ABC$  の内部に点  $O$  があるとき  $X = 2$ 、それ以外るとき  $X = 0$  とする。 $X$  の期待値を求めよ。

(広島大学 2007)

13  $a_1 = 2, a_2 = 1$  と  $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) によって定義される数列  $\{a_n\}$  について、次の問いに答えよ.

(1)  $b_n = a_{n+1} + a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とするとき、数列  $\{b_n\}$  は公比 2 の等比数列であることを示せ.

(2)  $n \geq 2$  のとき、 $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} b_k$  を  $n$  の式で表せ.

(3)  $a_n$  を  $n$  の式で表せ.

(4) 数列  $\left\{ \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\}$  の収束、発散を調べ、収束する場合はその極限值を求めよ.

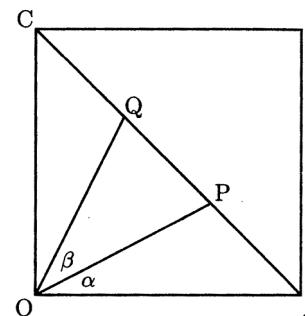
(広島大学 2006)

14 正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し、図のように、A に近い点を P, C に近い点を Q とする. また、 $\angle AOP = \alpha, \angle POQ = \beta$  とする. 次の問いに答えよ.

(1)  $\cos \alpha, \cos \beta$  の値を求めよ.

(2)  $\alpha < \frac{\pi}{6} < \beta$  を示せ.

(3) 線分 PQ 上に点 R を  $\angle POR = \alpha$  となるようにとる. このとき、比  $AR : RC$  を求めよ.



(広島大学 2006)

15 関数  $f(x) = x + \frac{x}{x^2 - 1}$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  の増減と極値を調べて、 $y = f(x)$  のグラフをかけ。
- (2)  $y = f(x)$  のグラフと直線  $y = mx$  の交点が、3 個になるような  $m$  の値の範囲を求めよ。
- (3)  $m < 0$  のとき、 $y = f(x)$  のグラフと直線  $y = mx$  で囲まれた二つの部分の面積の和を求めよ。

(広島大学 2006)





2008年 第2問

1枚目 / 2枚

 2 次の問いに答えよ。ただし、 $n$ は自然数を表す。
(1)  $0 \leq x \leq 1$  を満たす実数  $x$  に対して、不等式

$$\frac{x}{n+1} \leq \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$$

が成り立つことを示せ。ただし、対数は自然対数とする。

(2) 次の値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3) 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_n = \left(1 + \frac{1^5}{n^6}\right) \left(1 + \frac{2^5}{n^6}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^5}{n^6}\right)$$

で定めるとき、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

区分求積法より。

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 &= \int_0^1 x^5 dx \\ &= \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(1)  $f(x) = \frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$  とおくと。

$$f'(x) = \frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

$$= \frac{x}{n(n+x)}$$

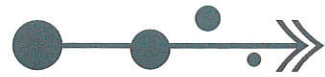
 $\therefore n$ : 自然数,  $0 \leq x \leq 1$  であるから,  $f'(x) \geq 0$  $\therefore f(x)$  は単調増加であり,  $f(x) \geq f(0) = 0$  すなわち,  $\log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$  $g(x) = \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n+1}$  とおくと。

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1-x}{(n+x)(n+1)}$$

 $n$ : 自然数,  $0 \leq x \leq 1$  であるから,  $g'(x) \geq 0$   $\therefore g(x)$  は単調増加であり,  $g(x) \geq g(0) = 0$ すなわち,  $\frac{x}{n+1} \leq \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$  以上より, 与えられた不等式が成り立つ  $\square$



2008年第2問

2枚目/2枚

数理  
石井K2 次の問いに答えよ。ただし、 $n$ は自然数を表す。(1)  $0 \leq x \leq 1$  を満たす実数  $x$  に対して、不等式

$$\frac{x}{n+1} \leq \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$$

が成り立つことを示せ。ただし、対数は自然対数とする。

(2) 次の値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3) 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_n = \left(1 + \frac{1^5}{n^6}\right) \left(1 + \frac{2^5}{n^6}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^5}{n^6}\right)$$

で定めるとき、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

$$(3) \log a_n = \log\left(1 + \frac{1^5}{n^6}\right) \left(1 + \frac{2^5}{n^6}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^5}{n^6}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k^5}{n^6}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^5\right) \cdots \textcircled{1}$$

いま、 $1 \leq k \leq n$  より、 $\frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq 1$  なので (1) より、 $x = \left(\frac{k}{n}\right)^5$  とおくと、

$$0 \leq x \leq 1 \text{ をみたして } \log\left(1 + \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n+1}\right) \leq \log\left(1 + \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n}\right) \leq \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より、} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n+1} \leq \log a_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ とすると、} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 = \frac{1}{6} \text{ (左辺)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 = \frac{1}{6} \text{ (右辺)}$$

$$\text{はさみうちの原理より、} \lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \frac{1}{6} \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n} = e^{\frac{1}{6}}$$

( $\because y = e^x$  は連続関数であることから)