$\boxed{1}$ 平面上に三角形OABがあり，点 A′，B′ は $\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たしているとする．線分 A′B′ を 2：1 に内分する点を P とし，線分 OP と線分 AB の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ および $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$ を求めよ．

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}$ であり，さらに $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が直交しているとき，三角形OABの面積および三角形PABの面積を求めよ．

（佐賀大学　2017）

$\boxed{2}$ 座標空間に 4 点 A(0，1，0)，B($\sqrt{3}$，2，0)，C($\sqrt{3}$，2，1)，D(-1，$1+\sqrt{3}$，0) がある．線分 DC を $t:(1-t)$ に内分する点を P とする（ただし，$0 < t < 1$）．次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 3点A，B，Cが定める平面上に点Hを，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方と垂直になるようにとる．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = u\overrightarrow{\mathrm{AB}} + v\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表すときの実数 u，v を求めよ．

(3) 点Pを中心とする半径 r の球が，3点A，B，Cが定める平面に接するように点Pを定める．このときの t の値を r で表せ（ただし，$r < 2$）．

（岩手大学　2017）

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = a_2 = -1,$$
$$a_{n+2} - (n+2)a_{n+1} + na_n = (n^2+n+1)(n+1)! \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとする．次の問いに答えよ．

(1) 数学的帰納法を用いて，

$$a_{n+1} - na_n = (n-1)(n+1)! \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $b_n = \dfrac{a_n}{(n-1)!}$ とおくとき，(1) を用いて数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

（宮城教育大学　2014）

佐賀大学

2017年 教育学部 第1問

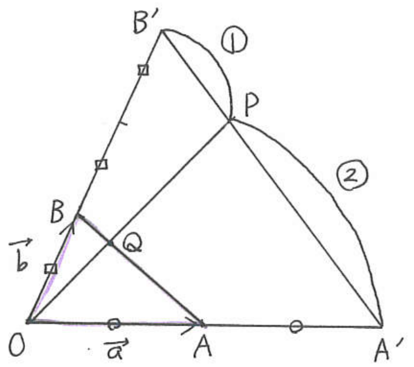
増田

1 平面上に三角形OABがあり，点A′，B′は$\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OB}$を満たしているとする．線分A′B′を2:1に内分する点をPとし，線分OPと線分ABの交点をQとする．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$および$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OQ}|}$を求めよ．

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}$であり，さらに$\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{AB}$が直交しているとき，三角形OABの面積および三角形PABの面積を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{OA'} + 2\overrightarrow{OB'}}{2+1}$

$= \dfrac{1}{3}(2\vec{a} + 2\times 3\vec{b})$

$= \dfrac{2}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$ //

(2) $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$ （k：実数）とおく。

$\overrightarrow{OQ} = \dfrac{2}{3}k\vec{a} + 2k\vec{b}$

Qは直線AB上にあるので、

$\dfrac{2}{3}k + 2k = 1$

$\therefore k = \dfrac{3}{8}$

$\overrightarrow{OQ} = \dfrac{3}{8}\overrightarrow{OP}$ より、 $\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OQ}|} = \dfrac{3}{8}$ //

(3) $\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{AB}$が直交 ⇔ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$
$\vec{a}\cdot\vec{b}$の値から、$\cos\angle BOA \to \sin\angle BOA$を求める。

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{2}{3}\vec{a} + 2\vec{b}\right)\cdot(-\vec{a} + \vec{b})$

$= -\dfrac{2}{3}|\vec{a}|^2 - \dfrac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} + 2|\vec{b}|^2 = 0$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = 2$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle BOA = 2$ より

$\cos\angle BOA = \dfrac{2}{\sqrt{15}}$

$\sin\angle BOA = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{\sqrt{15}}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$

$\triangle OAB = \dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle BOA$

$= \dfrac{\sqrt{11}}{2}$ //

また、$\triangle OAB : \triangle PAB = OQ : QP$

$= 3 : 5$

$\triangle PAB = \dfrac{5}{3}\triangle OAB$

$= \dfrac{5\sqrt{11}}{6}$ //

2017年 理工学部 第2問

増田

$\boxed{2}$ 座標空間に4点A(0, 1, 0), B($\sqrt{3}$, 2, 0), C($\sqrt{3}$, 2, 1), D(-1, $1+\sqrt{3}$, 0)がある．線分DCを$t:(1-t)$に内分する点をPとする（ただし，$0<t<1$）．次の問いに答えよ．

(1) 内積$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$および$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$をそれぞれ求めよ．

(2) 3点A, B, Cが定める平面上に点Hを，$\overrightarrow{PH}$が$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$の両方と垂直になるようにとる．$\overrightarrow{AH}=u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}$と表すときの実数$u$, vを求めよ．

(3) 点Pを中心とする半径rの球が，3点A, B, Cが定める平面に接するように点Pを定める．このときのtの値をrで表せ（ただし，$r<2$）．

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3}, 1, 0)\cdot(\sqrt{3}, 1, 1) = 3+1+0=4$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = (\sqrt{3}, 1, 0)\cdot(-1, \sqrt{3}, 0) = -\sqrt{3}+\sqrt{3}+0=0$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = (\sqrt{3}, 1, 1)\cdot(-1, \sqrt{3}, 0) = -\sqrt{3}+\sqrt{3}+0=0$

(2) $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AP}$

点Pは線分DCを$t:(1-t)$に内分する点なので、

$\overrightarrow{AP} = (1-t)\overrightarrow{AD} + t\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{PH} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} - (1-t)\overrightarrow{AD} - t\overrightarrow{AC} = u\overrightarrow{AB} + (v-t)\overrightarrow{AC} - (1-t)\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より、

$u|\overrightarrow{AB}|^2 + (v-t)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - (1-t)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 4u+4(v-t)=0 \cdots ①$

$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より、

$u\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + (v-t)|\overrightarrow{AC}|^2 - (1-t)\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = 4u+5(v-t)=0 \cdots ②$

①, ②より $\underline{v=t, \ u=0}$

(3) 球と3点A, B, Cが定める平面の接点をIとすると、$\overrightarrow{PI}$は$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の両方と垂直になるので、(2)で求めた点Hと一致する。

このとき $\overrightarrow{PH} = -(1-t)\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{PH}$は球の半径なので、

$|\overrightarrow{PH}| = |-(1-t)\overrightarrow{AD}| = (1-t)|\overrightarrow{AD}| = r$

$|\overrightarrow{AD}| = |(-1, \sqrt{3}, 0)| = 2$ だから

$2(1-t)=r$

$t = \underline{1-\dfrac{r}{2}}$

2014年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = a_2 = -1,$$
$$a_{n+2} - (n+2)a_{n+1} + na_n = (n^2+n+1)(n+1)! \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとする．次の問いに答えよ．

(1) 数学的帰納法を用いて，

$$a_{n+1} - na_n = (n-1)(n+1)! \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $b_n = \dfrac{a_n}{(n-1)!}$ とおくとき，(1) を用いて数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) n に関する数学的帰納法.

(i) $n=1$ のとき. $a_2 - 1\cdot a_1 = 0$ となり. $a_1 = a_2 = -1$ より成り立っている.

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると.

$$a_{k+1} - ka_k = (k-1)(k+1)! \cdots (*)$$

$$a_{k+2} - (k+1)a_{k+1} = a_{k+1} - k\cdot a_k + (k^2+k+1)(k+1)!$$

$\{a_n\}$ の漸化式より, $= (k-1)(k+1)! + (k^2+k+1)(k+1)!$ ($\because (*)$より)

$$= (k^2+2k)(k+1)!$$

$$= k\cdot(k+2)! \quad \therefore n=k+1 \text{ のとき成り立つ}$$

(i), (ii) より. $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して. 与式が成り立つ ▨

(2) (1)の与式を両辺 $n!$ で割って.

$$\frac{a_{n+1}}{n!} - \frac{a_n}{(n-1)!} = n^2 - 1 \qquad \therefore b_{n+1} - b_n = n^2 - 1$$

$n \geqq 2$ のとき.

$$\therefore b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1) \qquad b_1 = \frac{a_1}{0!} = -1 \text{ より}. \quad b_n = -1 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - (n-1)$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n-5)$$ ← これは $n=1$ のときも成り立っている.

(3) $a_n = (n-1)!\cdot b_n = \dfrac{(n+1)!(2n-5)}{6}$