＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 実数 x, y, z が

$$x+y+z=1, \quad x+2y+3z=5$$

を満たすとする．

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ．

(2) $z \geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ．

（大阪大学　2017）

$\boxed{2}$ a, b, c を実数とし，

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

とおく．曲線 $C: y=f(x)$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある．

(1) P における C の接線の方程式を求めよ．

(2) P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を s, t, a の関係式として求めよ．

(3) (2) の条件のもとで，線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ．

（北海道大学　2016）

$\boxed{3}$ p, q, r を有理数とし，$f(x)=x^3+3px^2+qx+r$ とする．曲線 $y=f(x)$ は点 $(t,\ 0)$ で x 軸に接している．

(1) $f(x)=f'(x)(Ax+B)+Cx+D$ をみたす定数 A, B, C, D を p, q, r を用いて表せ．

(2) t は有理数であることを示せ．

（津田塾大学　2016）

大阪大学

2017年 文系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 実数 x, y, z が

$$x+y+z=1,\quad x+2y+3z=5$$

を満たすとする．

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ．

(2) $z \geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ．

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$= \frac{1}{2}(x+y+z)\left\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \cdots (*)$ $x+y+z=1$ を代入した.

$x+y+z=1 \cdots ①$，$x+2y+3z=5 \cdots ②$

②−① より，$y+2z=4$ $\therefore y=-2z+4$

① に代入して，$x-2z+4+z=1$ $\therefore x=z-3$

これらを $(*)$ に代入して，z のみで表すと，

$x^3+y^3+z^3-3xyz = \frac{1}{2}\left\{(3z-7)^2+(-3z+4)^2+3^2\right\}$

$= 9z^2-33z+37$

$= 9\left(z^2-\frac{11}{3}z\right)+37$

$= 9\left(z-\frac{11}{6}\right)^2+\frac{27}{4}$

$\therefore$ 最小値は $\frac{27}{4}$ $\left(x=-\frac{7}{6},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{11}{6}\text{ のとき}\right)$ //

(2) (1) より，$xyz=(z-3)(-2z+4)z$

$= -2z^3+10z^2-12z$

これを $f(z)$ とおくと，$f'(z)=-6z^2+20z-12$

$= -2(3z^2-10z+6)$

$f'(z)=0$ となるのは，$z=\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}$ のとき

z	0	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$
$f'(z)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(z)$	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$2<\frac{5+\sqrt{7}}{3}$ と $f(2)=0$ より，右の増減表より $f\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)>f(2)=0$

よって，xyz が最大となる z は，$z=\frac{5+\sqrt{7}}{3}$ //

北海道大学

2016年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ $a,\ b,\ c$ を実数とし，

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

とおく．曲線 $C : y=f(x)$ 上に異なる2点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある．

(1) Pにおける C の接線の方程式を求めよ．

(2) Pにおける C の接線とQにおける C の接線が平行になるための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式として求めよ．

(3) (2)の条件のもとで，線分PQの中点が C 上にあることを示せ．

(1) $f'(x)=3x^2+2ax+b$

∴ Pにおける C の接線は，

$$y=(3s^2+2as+b)(x-s)+s^3+as^2+bs+c$$

$$\therefore\ \underline{y=(3s^2+2as+b)x-2s^3-as^2+c}\ //$$

(2) (1)と同様にして，Qにおける C の接線は，

$$y=(3t^2+2at+b)x-2t^3-at^2+c$$

∴ 2本の接線が平行 $\iff 3s^2+2as+b=3t^2+2at+b$

$\iff 3(s+t)(s-t)+2a(s-t)=0$

$\iff (s-t)(3s+3t+2a)=0$

P≠Qより，$s\neq t$ であるから，$3s+3t+2a=0$

$$\therefore\ \underline{s+t=-\frac{2}{3}a}\ //$$

(3) 線分PQの中点を $\mathrm{M}(X,Y)$ とおくと，

$X=\dfrac{s+t}{2}=-\dfrac{a}{3}$，$Y=\dfrac{f(s)+f(t)}{2}=\dfrac{1}{2}(s^3+t^3)+\dfrac{a}{2}(s^2+t^2)+\dfrac{b}{2}(s+t)+c$

これを使ってYの式変形をする．

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}(s+t)(s^2-st+t^2)+\frac{a}{2}(s^2+t^2)+\frac{b}{2}(s+t)+c\\
&=X\{(2X)^2-3st\}+\frac{a}{2}\{(2X)^2-2st\}+bX+c\\
&=4X^3-3stX+2aX^2-ast+bX+c\\
&=X^3+aX^2+bX+c+(3X^3+aX^2-3stX-ast)\\
&=X^3+aX^2+bX+c+(3X^3-3X^3-3stX+3stX)\\
&=X^3+aX^2+bX+c
\end{aligned}$$

∴ 中点MはC上にある ▨

津田塾大学

2016年 学芸（数学） 第2問

$\boxed{2}$ p，q，r を有理数とし，$f(x) = x^3 + 3px^2 + qx + r$ とする．曲線 $y = f(x)$ は点 $(t,\ 0)$ で x 軸に接している．

(1) $f(x) = f'(x)(Ax + B) + Cx + D$ をみたす定数 A，B，C，D を p，q，r を用いて表せ．

(2) t は有理数であることを示せ．

(1) $f'(x) = 3x^2 + 6px + q$

$$\therefore f'(x)(Ax+B)+Cx+D = (3x^2+6px+q)(Ax+B)+Cx+D$$
$$= 3Ax^3+3Bx^2+6pAx^2+6pBx+qAx+qB+Cx+D$$
$$= 3Ax^3+3(B+2pA)x^2+(6pB+qA+C)x+qB+D$$

これと $f(x)$ の各項の係数を比較して，

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ B+2pA = p \\ 6pB+qA+C = q \\ qB+D = r \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{3}p \\ C = \frac{2}{3}q - 2p^2 \\ D = r - \frac{1}{3}pq \end{cases}$$ //

(2) $y = f(x)$ は点 $(t, 0)$ で x 軸に接するので，$f(t) = f'(t) = 0$

$f(x) = f'(x)(Ax+B) + Cx + D$ に $x = t$ を代入して．$Ct + D = 0$

(i) $C \neq 0$ のとき

$t = -\frac{D}{C}$ となり，

(1)の結果と，p, q, r が有理数であることより．C, D は有理数 $\therefore$ t は有理数

(ii) $C = 0$ のとき，

$D = 0$ となり，$q = 3p^2$ かつ $r = \frac{1}{3}pq = p^3$

$$\therefore f(x) = x^3 + 3px^2 + 3p^2x + p^3$$
$$= (x+p)^3$$

$y = f(x)$ のグラフは $(-p, 0)$ で x 軸に接するので，$t = -p$（有理数）

(i),(ii)より，いずれの場合も t は有理数となる ▨