

1 曲線 $C: y = (\log x)^2 + \frac{3}{4}$ ($x > 0$) について、以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。また, $\frac{dy}{dx} > 0$ となる x の範囲を求めよ。
- (2) 曲線 C の接線で原点 $(0, 0)$ を通るものを求めよ。
- (3) 曲線 C の概形と (2) で求めた接線を描け。
- (4) (2) で求めた接線の中で傾きが最大のもので曲線 C との接点を P とする。点 P の座標を求めよ。
- (5) (4) で求めた点 P を通り x 軸に平行な直線と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(同志社大学 2014)

2014年 理系全学部日程 第3問

数理
石井K

3 曲線 $C: y = (\log x)^2 + \frac{3}{4}$ ($x > 0$) について、以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。また, $\frac{dy}{dx} > 0$ となる x の範囲を求めよ。
- (2) 曲線 C の接線で原点 $(0, 0)$ を通るものを求めよ。
- (3) 曲線 C の概形と (2) で求めた接線を描け。
- (4) (2) で求めた接線の中で傾きが最大のもとの曲線 C との接点を P とする。点 P の座標を求めよ。
- (5) (4) で求めた点 P を通り x 軸に平行な直線と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{2 \log x}{x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - 2 \log x}{x^2} = \frac{2(1 - \log x)}{x^2} //$$

$$\frac{dy}{dx} > 0 \text{ となるのは, } \underline{x > 1} //$$

(2) 接点を $(t, (\log t)^2 + \frac{3}{4})$ ($t > 0$) とおくと、接線は

$$y = \frac{2 \log t}{t} (x - t) + (\log t)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\text{これが原点を通るので, } 0 = -2 \log t + (\log t)^2 + \frac{3}{4}$$

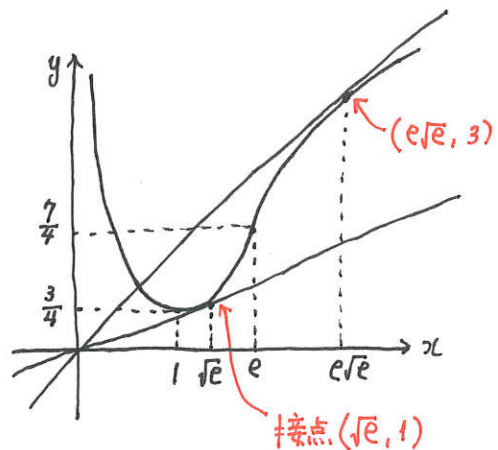
$$\therefore (\log t - \frac{1}{2})(\log t - \frac{3}{2}) = 0 \quad \therefore \log t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \quad \therefore t = \sqrt{e}, e\sqrt{e}$$

$$\therefore \text{接線は, } \underline{y = \frac{1}{\sqrt{e}}x, y = \frac{3}{e\sqrt{e}}x} //$$

(3) 増減表は(1)より次のようになる。

x	(0)	\dots	1	\dots	e	\dots	$(+\infty)$
$\frac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\frac{d^2y}{dx^2}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	$(+\infty)$	\searrow	$\frac{3}{4}$	\nearrow	$\frac{7}{4}$	\nearrow	$(+\infty)$

\therefore 右のグラフになる。



(4) 傾きが最大のは $y = \frac{3}{e\sqrt{e}}x$ より。 $\underline{P(e\sqrt{e}, 3)}$ //

(5) $(\log x)^2 + \frac{3}{4} = 3$ より $\log x = \pm \frac{3}{2} \quad \therefore x = e\sqrt{e}, \frac{1}{e\sqrt{e}}$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \int_{\frac{1}{e\sqrt{e}}}^{e\sqrt{e}} \left[\frac{1}{e\sqrt{e}} - (\log x)^2 + \frac{3}{4} \right] dx = \left[-x(\log x)^2 \right]_{\frac{1}{e\sqrt{e}}}^{e\sqrt{e}} + \int_{\frac{1}{e\sqrt{e}}}^{e\sqrt{e}} 2 \log x dx + \frac{3}{4} \left(e\sqrt{e} - \frac{1}{e\sqrt{e}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{e}(e^3+5)}{e^2} // \quad \left(= e\sqrt{e} + \frac{5}{e\sqrt{e}} \text{ じゃよ!!} \right) \end{aligned}$$

