＿＿＿年　番号＿＿＿　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 自然数の 2 乗となる数を平方数という．

(1) 自然数 a，n，k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ．

（北海道大学　2017）

$\boxed{2}$ 自然数 360 は 2 つの自然数 a と b の積で表すことができる．a，b が互いに素であるとすると，a，b の組 $(a,\ b)$ はいくつあるか．ただし，例えば，$(a,\ b)=(1,\ 360)$，$(360,\ 1)$ は，異なる組としてあつかうこととする．

（自治医科大学　2017）

$\boxed{3}$ $x,\ y$ を自然数とする．

（1） $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ．

（2） $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

（北海道大学　2016）

北海道大学

2017年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 自然数の2乗となる数を平方数という.

(1) 自然数 a, n, k に対して, $n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき,

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ.

(1) $a=(n+k)^2-n(n+1)$

$= k^2+2kn-n$

$= k^2+(2k-1)n$

ここで, n, k は自然数より, $2k-1 \geqq 1$, $n \geqq 1$

よって, $a \geqq k^2+(2k-1)\cdot 1$

$= k^2+2k-1$ ▨

(2) (1) において, $a=7$ のときを考えると,

$n(n+1)+7=(n+k)^2$ となるとき, $7 \geqq k^2+2k-1$ $\cdots$ (*)

(*) を解くと,

$k^2+2k-8 \leqq 0$

$\therefore (k+4)(k-2) \leqq 0$

$\therefore -4 \leqq k \leqq 2$

k は自然数より, $k=1, 2$

$k=1$ のとき, $n(n+1)+7=(n+1)^2$ より $n=6$

$k=2$ のとき, $n(n+1)+7=(n+2)^2$ より, $n=1$

$\therefore$ 求める n は, $\underline{n=1, 6}$ //

2017年 医学部 第15問

増田

$\boxed{15}$ 自然数360は2つの自然数aとbの積で表すことができる．a，bが互いに素であるとすると，a，bの組(a, b)はいくつあるか．ただし，例えば，$(a, b)=(1, 360)$，$(360, 1)$は，異なる組としてあつかうこととする．

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 360 \\ 2 & 180 \\ 2 & 90 \\ 3 & 45 \\ 3 & 15 \\ & 5 \end{array}$$

aとbは互いに素なので．

2^3　3^2　5　のうち

a 1コ，b 2コに分ける

$\Rightarrow (8, 45), (9, 40), (5, 72)$

a 2コ，b 1コに分ける

$\Rightarrow (45, 8), (40, 9), (72, 5)$

さらに $(1, 360)$ と $(360, 1)$

全部で 8組

0002189180187999

北海道大学

2016年 文系 第4問

数理 石井K

4 $x,\ y$ を自然数とする．

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ．

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であることより，

$$\frac{3x}{x^2+2} \geqq 1 \iff x^2-3x+2 \leqq 0$$
$$\iff (x-1)(x-2) \leqq 0$$
$$\iff 1 \leqq x \leqq 2$$

x は自然数より，$x=1,2$

$x=1$ のとき，$\dfrac{3\cdot 1}{1^2+2}=1$ ，$x=2$ のとき，$\dfrac{3\cdot 2}{2^2+2}=1$ となり，ともに条件をみたす．

$\therefore\ \underline{x=1,2}$ //

(2) $y=1$ のときは，$\dfrac{3x}{x^2+2}$ が0以上の整数になればよいが，$\dfrac{3x}{x^2+2}>0$ より $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数になるときなので

(1)と同じである

$y \geqq 2$ のときは，$0<\dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{2}$ より，

$$\frac{3x}{x^2+2} \geqq \frac{1}{2} \iff x^2-6x+2 \leqq 0$$
$$\iff 3-\sqrt{7} \leqq x \leqq 3+\sqrt{7}$$

x は自然数より，$x=1,2,3,4,5$

- $x=1$ のとき，$\dfrac{3\cdot 1}{1^2+2}=1$ $\quad\therefore\ y=1$ これは $y \geqq 2$ に反して不適
- $x=2$ のとき $\dfrac{3\cdot 2}{2^2+2}=1$ $\quad\therefore\ y=1$ 不適
- $x=3$ のとき，$\dfrac{3\cdot 3}{3^2+2}=\dfrac{9}{11}$ $\quad 0<\dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{9}{11}<\dfrac{9}{11}+\dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{29}{22}$ なので

  $\dfrac{9}{11}+\dfrac{1}{y}=1$ $\quad\therefore\ y=\dfrac{11}{2}$ $\quad y$ は自然数なので不適
- $x=4$ のとき，$\dfrac{3\cdot 4}{4^2+2}=\dfrac{2}{3}$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore\ y=3$
- $x=5$ のとき，$\dfrac{3\cdot 5}{5^2+2}=\dfrac{5}{9}$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{9}$ $\quad\therefore\ y=\dfrac{9}{4}$ 不適

以上より，$\underline{(x,y)=(1,1),(2,1),(4,3)}$ //