

1 次の問に答えよ.

(1) xy 平面上の円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ と $A(-1, 0)$ を考える. ただし, $-\pi < \theta < \pi$ とする. 直線 AP の傾きを t としたとき, $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を t を用いて表せ.

(2) $-\pi < \theta \leq \pi$ とする. θ の関数 $f(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{3 \cos \theta - 2 \sin \theta + 5}$ の最大値と最小値, またそのときの θ の値を求めよ.

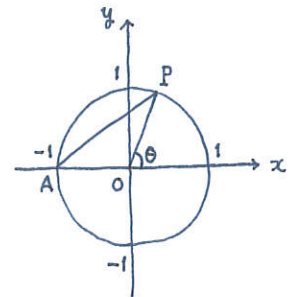
(大阪歯科大学 2012)

2012年 歯学部 第4問


 数理
石井K

4 次の問に答えよ。

- (1) xy 平面上の円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ と $A(-1, 0)$ を考える。ただし、 $-\pi < \theta < \pi$ とする。直線 AP の傾きを t としたとき、 $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を t を用いて表せ。
- (2) $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。 θ の関数 $f(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{3\cos\theta - 2\sin\theta + 5}$ の最大値と最小値、またそのときの θ の値を求めよ。

(1) 直線 AP : $y = t(x+1)$

$$\text{円の式に代入して. } x^2 + t^2(x+1)^2 - 1 = 0$$

$$\therefore (t^2+1)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$$

$$\therefore \{(t^2+1)x + t^2 - 1\}(x+1) = 0$$

$$\cos\theta \neq -1 \text{ より. } \cos\theta = \frac{1-t^2}{t^2+1}, \sin\theta = \frac{2t}{t^2+1}$$

(2) (1) で求めた値を代入して、 $f(\theta)$ を t で表したものを $g(t)$ とする。

$$g(t) = \frac{1 + \frac{1-t^2}{t^2+1}}{3 \cdot \frac{1-t^2}{t^2+1} - 2 \cdot \frac{2t}{t^2+1} + 5} = \frac{1}{t^2 - 2t + 4} = \frac{1}{(t-1)^2 + 3}$$

 t はすべての実数を動くので $g(t)$ の最大値は $g(1) = \frac{1}{3}$, 最小値は 0 ($t \rightarrow \pm\infty$ のとき)
 $\therefore f(\theta)$ の最大値は $\frac{1}{3}$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき) , 最小値 0 ($\theta = \pi$ のとき)