

1 実数 t に対し, 複素数

$$\left(\frac{1}{2} + \cos t + i \sin t\right)^2$$

の実部を $f(t)$, 虚部を $g(t)$ とする. 座標平面上に

$$\text{曲線 } C : x = f(t), \quad y = g(t) \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

がある.

- (1) $0 \leq t \leq \pi$ のとき $f(t)$ のとる値の範囲を求めよ.
- (2) 曲線 C 上の点 $P\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right), g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ における接線の方程式を求めよ.
- (3) 曲線 C の $y \leq 0$ の範囲にある部分と x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(名古屋工業大学 2016)

2016年工学部第4問

1枚目/2枚


4 実数 t に対し, 複素数

$$\left(\frac{1}{2} + \cos t + i \sin t\right)^2$$

の実部を $f(t)$, 虚部を $g(t)$ とする. 座標平面上に

$$\text{曲線 } C: x = f(t), \quad y = g(t) \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

がある.

(1) $0 \leq t \leq \pi$ のとき $f(t)$ のとる値の範囲を求めよ.

(2) 曲線 C 上の点 $P\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right), g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ における接線の方程式を求めよ.

(3) 曲線 C の $y \leq 0$ の範囲にある部分と x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求めよ.

$$\begin{aligned} (1) f(t) &= \left(\frac{1}{2} + \cos t\right)^2 - \sin^2 t \\ &= \frac{1}{4} + \cos t + \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) \\ &= 2 \cos^2 t + \cos t - \frac{3}{4} \\ &= 2 \left(\cos t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq \pi \text{ より, } -1 \leq \cos t \leq 1 \text{ であるから, } -\frac{7}{8} \leq f(t) \leq \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} (2) g(t) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos t\right) \cdot \sin t \\ &= \sin t + 2 \sin t \cos t \end{aligned}$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}, \quad g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

点 P における接線の傾きを求める. $f'(t) = -4 \sin t \cos t - \sin t$, $g'(t) = \cos t + 2 \cos 2t$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad \therefore \text{傾きは } \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{9} \left(x - \frac{1}{4}\right) + \sqrt{3} \quad \therefore y = \frac{\sqrt{3}}{9} x + \frac{35\sqrt{3}}{36} //$$

$$(3) g(t) \leq 0 \iff \sin t (1 + 2 \cos t) \leq 0$$

$$0 \leq t \leq \pi \text{ より, } t = 0, \quad \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \pi$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (-\sin t - 2 \sin t \cos t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (\sin t + \sin 2t)(\sin t + 2 \sin 2t) dt \end{aligned}$$

2枚目へつづく

2016年工学部第4問

2枚目/2枚


 数理
石井K
4 実数 t に対し、複素数

$$\left(\frac{1}{2} + \cos t + i \sin t\right)^2$$

の実部を $f(t)$ 、虚部を $g(t)$ とする。座標平面上に

$$\text{曲線 } C: x = f(t), \quad y = g(t) \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

がある。

(1) $0 \leq t \leq \pi$ のとき $f(t)$ のとる値の範囲を求めよ。

(2) 曲線 C 上の点 $P\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right), g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(3) 曲線 C の $y \leq 0$ の範囲にある部分と x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(3) のつぎ

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin^2 t + 3 \sin t \sin 2t + 2 \sin^2 2t \, dt \\ &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} (\cos t - \cos 3t) + 2 \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2} \, dt \end{aligned}$$

半角の公式と
 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \}$
 よし

$$= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} -\cos 4t - \frac{3}{2} \cos 3t - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{3}{2} \cos t + \frac{3}{2} \, dt$$

$$= \left[-\frac{1}{4} \sin 4t - \frac{1}{2} \sin 3t - \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{3}{2} \sin t + \frac{3}{2} t \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{3}{2} \pi - \left(-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + \pi \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad ,,$$