＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2$ とおく．ただし，$a>0$ とする．

(1) $f(-1)\leqq f(3)$ となる a の範囲を求めよ．

(2) $f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下となる a の範囲を求めよ．

(3) $-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ．

（筑波大学　2010）

$\boxed{2}$ 3 つの曲線

$$C_1 : y=\sin x \quad \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$
$$C_2 : y=\cos x \quad \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$
$$C_3 : y=\tan x \quad \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$

について以下の問いに答えよ．

(1) C_1 と C_2 の交点，C_2 と C_3 の交点，C_3 と C_1 の交点のそれぞれについて y 座標を求めよ．

(2) C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ．

（筑波大学　2010）

$\boxed{3}$ n を自然数とし，1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 単調に増加する連続関数 $f(x)$ に対して，不等式 $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx\leqq f(k)$ を示せ．

(2) 不等式 $\displaystyle\int_{1}^{n}\log x\,dx\leqq \log n!$ を示し，不等式 $n^n e^{1-n}\leqq n!$ を導け．

(3) $x\geqq 0$ に対して，不等式 $x^n e^{1-x}\leqq n!$ を示せ．

（筑波大学　2010）

$\boxed{4}$ 点 O を原点とする座標平面上に，2 点 A$(1,\ 0)$，B$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(90^\circ<\theta<180^\circ)$ をとり，以下の条件をみたす 2 点 C，D を考える．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=1$$

また，△OAB の面積を S_1，△OCD の面積を S_2 とおく．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の成分を求めよ．

(2) $S_2=2S_1$ が成り立つとき，θ と S_1 の値を求めよ．

(3) $S=4S_1+3S_2$ を最小にする θ と，そのときの S の値を求めよ．

（筑波大学　2010）

$\boxed{5}$ 直線 $\ell : mx+ny=1$ が，楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ に接しながら動くとする．

(1) 点 $(m,\ n)$ の軌跡は楕円になることを示せ．

(2) C の焦点 $F_1(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ と ℓ との距離を d_1 とし，もう 1 つの焦点 $F_2(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ と ℓ との距離を d_2 とする．このとき $d_1 d_2=b^2$ を示せ．

（筑波大学　2010）