＿＿＿年　番号＿＿＿　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 複素数 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\omega^2 + \omega^4$，$\omega^5 + \omega^{10}$ の値を求めよ．

(2) n を正の整数とするとき，$\omega^n + \omega^{2n}$ の値を求めよ．

(3) n を正の整数とするとき，

$$(\omega+2)^n + (\omega^2+2)^n$$

が整数であることを証明せよ．

（岡山大学　2016）

$\boxed{2}$ a, b, p, q, r は実数とする．3 次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の 3 つの解が

$$(2a+1)^2 + (a-b)i,\ (2a+1)^2 + (a^2+b+1)i,\ (2a+1)^2 + (a^2+b-1)i$$

であるとき，p, q, r の値を求めなさい．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．

（埼玉大学　2016）

2016年 文系 第1問

数理 石井K

1 複素数 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\omega^2+\omega^4$，$\omega^5+\omega^{10}$ の値を求めよ．

(2) n を正の整数とするとき，$\omega^n+\omega^{2n}$ の値を求めよ．

(3) n を正の整数とするとき，

$$(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n$$

が整数であることを証明せよ．

(1) 計算すると，$\omega^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，$\omega^3=1$，$\omega+\omega^2=-1$ となるから，

$\omega^2+\omega^4 = \omega^2+\omega = \underline{-1}$ //　　$\omega^5+\omega^{10} = \omega^2+\omega = \underline{-1}$ //

(2) k を整数として，次のように場合分けをして考える．

(i) $n=3k$ のとき

$$\omega^n+\omega^{2n} = (\omega^3)^k+(\omega^3)^{2k} = 1+1 = 2$$

(ii) $n=3k+1$ のとき

$$\omega^n+\omega^{2n} = \omega^{3k}\cdot\omega+\omega^{6k}\cdot\omega^2 = (\omega^3)^k\cdot\omega+(\omega^3)^{2k}\cdot\omega^2 = \omega+\omega^2 = -1$$

(iii) $n=3k+2$ のとき

$$\omega^n+\omega^{2n} = \omega^{3k}\cdot\omega^2+\omega^{6k}\cdot\omega^4 = (\omega^3)^k\cdot\omega^2+(\omega^3)^{2k}\cdot\omega^3\cdot\omega = \omega^2+\omega = -1$$

(i)〜(iii) より

$$\underline{\omega^n+\omega^{2n} = \begin{cases} 2 & (n\text{が}3\text{の倍数のとき}) \\ -1 & (n\text{が}3\text{の倍数ではないとき}) \end{cases}}$$ //

(3) 2項定理より

$$(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\cdot\omega^k\cdot 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\cdot\omega^{2k}\cdot 2^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\cdot 2^{n-k}\cdot(\omega^k+\omega^{2k}) \quad \cdots (*)$$

$k=0$ のときも $\omega^0+\omega^0=2$ となり整数となっている．

ここで，各 k に対して，${}_nC_k$，2^{n-k} は整数，$\omega^k+\omega^{2k}$ は (2) より整数であるから

和 (*) も整数である．すなわち $(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n$ は整数である ▨

埼玉大学

2016年 教育・経済学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ a, b, p, q, r は実数とする．3次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ の3つの解が

$(2a+1)^2+(a-b)i$, $(2a+1)^2+(a^2+b+1)i$, $(2a+1)^2+(a^2+b-1)i$

であるとき，p, q, r の値を求めなさい．ただし，$i=\sqrt{-1}$ である．

解と係数の関係より

$(2a+1)^2+(a-b)i+(2a+1)^2+(a^2+b+1)i+(2a+1)^2+(a^2+b-1)i=-p$

右辺は実数であるから，

$a-b+a^2+b+1+a^2+b-1=0$

$\therefore b=-2a^2-a$

このとき，3つの解は

$(2a+1)^2+(2a^2+2a)i$, $(2a+1)^2+(-a^2-a+1)i$, $(2a+1)^2+(-a^2-a-1)i$

このうち少なくとも1つは実数解である

(i) $(2a+1)^2+(2a^2+2a)i$ が実数のとき

$2a(a+1)=0 \quad \therefore a=-1, 0$

① $a=-1$ のとき　3つの解は．$1, 1+i, 1-i$ となり条件をみたす

② $a=0$ のとき　〃　$1, 1+i, 1-i$　〃

(ii) $(2a+1)^2+(-a^2-a+1)i$ が実数のとき

$a^2+a-1=0 \quad \therefore a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

このとき 3つの解は．$5+2i$, 5, $5-2i$ となり条件をみたす

(i),(ii) と $-a^2-a-1=-\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0$ より

$$\begin{cases} -p=1+1+i+1-i=3 \\ q=1+i+1-i+(1+i)(1-i)=4 \\ -r=1\cdot(1+i)(1-i)=2 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} -p=5+2i+5+5-2i=15 \\ q=5(5+2i+5-2i)+(5+2i)(5-2i)=79 \\ -r=5(5+2i)(5-2i)=145 \end{cases}$$

$\therefore \underline{(p,q,r)=(-3,4,-2),\ (-15,79,-145)}$ //