$\boxed{1}$ n を 1 以上の整数とする．

(1) n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数 d_n を求めよ．

(2) $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ．

（東京大学　2019）

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ．ただし，(1) については，結論のみを書けばよい．

(1) n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする．a_n を求めよ．

(2) n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする．b_n を求めよ．

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める．

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ．

（東京大学　2016）

$\boxed{3}$ 以下の命題 A，B それぞれに対し，その真偽を述べよ．また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ．

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26} + 100 \geqq n^2$ が成り立つ．

命題 B　整数 $n,\ m,\ \ell$ が $5n + 5m + 3\ell = 1$ をみたすならば，$10nm + 3m\ell + 3n\ell < 0$ が成り立つ．

（東京大学　2015）

$\boxed{4}$ 次の命題 P を証明したい．

命題 P　次の 2 条件 (a)，(b) をともに満たす自然数（1 以上の整数）A が存在する．

(a)　A は連続する 3 つの自然数の積である．

(b)　A を 10 進法で表したとき，1 が連続して 99 回以上現れるところがある．

以下の問いに答えよ．

(1) y を自然数とする．このとき不等式

$$x^3 + 3yx^2 < (x+y-1)(x+y)(x+y+1) < x^3 + (3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ．

(2) 命題 P を証明せよ．

（東京大学　2013）

$\boxed{5}$ n を 2 以上の整数とする．自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする．以下の問いに答えよ．

(1) 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ．

(2) 連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ．

（東京大学　2012）

$\boxed{6}$ nを2以上の自然数とする．

(1) nが素数または4のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ．

(2) nが素数でなくかつ4でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ．

（東京工業大学　2016）

$\boxed{7}$ nを相異なる素数 p_1，p_2，$\cdots$，p_k $(k \geqq 1)$ の積とする．a，b を n の約数とするとき，a，b の最大公約数を G，最小公倍数を L とし，

$$f(a,\ b) = \frac{L}{G}$$

とする．

(1) $f(a,\ b)$ が n の約数であることを示せ．

(2) $f(a,\ b) = b$ ならば，$a = 1$ であることを示せ．

(3) m を自然数とするとき，m の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とする．$S(f(a,\ b)) + S(a) + S(b)$ が偶数であることを示せ．

（東京工業大学　2015）

2016年 文系 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ．ただし，(1)については，結論のみを書けばよい．

(1) n を正の整数とし，3^n を10で割った余りを a_n とする．a_n を求めよ．

(2) n を正の整数とし，3^n を4で割った余りを b_n とする．b_n を求めよ．

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める．

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を10で割った余りを求めよ．

(1) $a_n = \begin{cases} 3 & (n = 4k+1 \text{ のとき}) \\ 9 & (n = 4k+2 \text{ のとき}) \\ 7 & (n = 4k+3 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 4k+4 \text{ のとき}) \end{cases}$ （k は0以上の整数）

(2) $3^{2m} = 9^m$ であるから，$9 \equiv 1 \pmod 4$ より

$3^{2m} \equiv 1 \pmod 4$

よって，$3^{2m+1} \equiv 3 \pmod 4$

$\therefore\ b_n = \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 3 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$

(3) $\{x_n\}$ の漸化式より，x_n は奇数

$\therefore$ (2)より，$x_2, x_3, \cdots$ はすべて4で割ると3余る

$\therefore$ (1)より，$x_3, x_4, \cdots$ はすべて10で割ると，7余る

$\therefore$ x_{10} を10で割った余りは，$\underline{7}$ //

東京大学

2015年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 以下の命題A，Bそれぞれに対し，その真偽を述べよ．また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ．

命題A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ．

命題B　整数 n，m，ℓ が $5n+5m+3\ell=1$ をみたすならば，$10nm+3m\ell+3n\ell<0$ が成り立つ．

A.

$f(x)=\dfrac{x^3}{26}-x^2+100$ とおくと．$f'(x)=\dfrac{1}{26}(3x^2-52x)$

x	0	$\cdots$	$\frac{52}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	100	$\searrow$		$\nearrow$

$\therefore$ $f'(x)=0$ となるのは．$x=0,\ \dfrac{52}{3}$

$17<\dfrac{52}{3}<18$

$n=17, 18$ が反例として怪しいと分かる

よって，$n=17$ として計算してみると，

$$(左辺)=\frac{17\times17\times17}{26}+100=\frac{17\times17\times17+2600}{26}<288.97$$

$$(右辺)=289$$

$\therefore$ 偽であり，反例は $n=17$ //

B. $5n+5m+3\ell=1$ より，$3\ell=1-5n-5m$

$$\begin{aligned}\therefore\ 10nm+3m\ell+3n\ell &= 10nm+3\ell(m+n)\\ &= 10nm+(1-5n-5m)(m+n)\\ &= 10nm+m+n-5(m+n)^2\\ &= -5n^2+n-5m^2+m\end{aligned}$$

ここで，$g(x)=-5x^2+x$ とおくと，$g(x)=-5\left(x-\dfrac{1}{10}\right)^2+\dfrac{1}{20}$

$\because$ $g(n)$ は n：整数より．$g(0)$ と $g(1)$ のうち大きい方が $g(n)$ の最大値となる

$g(0)=0$，$g(1)=-4$ より．$g(n)\leqq 0$

同様にして．$g(m)\leqq 0$　ただし．$5n+5m+3\ell=1$ より．$g(n)=0$，$g(m)=0$ が同時に成り立つことはない（$\because$ ℓ も整数であるから）

$\therefore$ $10nm+3m\ell+3n\ell=g(n)+g(m)<0$

$\therefore$ 真となる ▨