＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．点 O を中心とする円周上に反時計回りに並んだ 5 点 A，B，C，D，E があり，∠AOB，∠BOC，∠COD，∠DOE はすべて θ に等しい．$\alpha = 2\pi - 4\theta$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$t = \cos\theta$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{c}$ と t を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \vec{0}$ が成り立つとき，α は θ に等しいことを示せ．

$\boxed{2}$ n は 2 以上の自然数とする．1 つの袋と 1 つの箱がある．袋には白玉 3 個と赤玉 2 個が入っており，箱には何も入っていない．次の操作を考える．

袋から玉を 1 個取り出し，白玉なら袋に戻し，赤玉なら箱に入れる．

この操作を n 回繰り返す．n 回目の操作の後，箱に入っている赤玉の個数を X とする．

(1) k を n 以下の自然数とする．k 回目の操作では赤玉を取り出し k 回目以外の $n-1$ 回の操作では白玉を取り出す確率を n と k を用いて表せ．次に，$X=1$ である確率 p_n を求めよ．

(2) $X=2$ である確率 q_n を求めよ．

(3) X の期待値 E_n を求めよ．また，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(2-E_n)$ を求めよ．

$\boxed{3}$ 関数 $f(t)=2(\cos t-\sin t)$，$g(t)=\cos t+\sin t$ を用いて媒介変数表示された，xy 平面上の曲線 $C: x=f(t)$，$y=g(t)$ がある．点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{2}\right)$ から C 上の点 $\mathrm{P}(f(t),\ g(t))$ までの距離 AP の 2 乗 AP^2 を $h(t)$ とおく．

(1) $\dfrac{d}{dt}h(t)=0$ となる t の値を $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲ですべて求めよ．

(2) C は楕円であることを示せ．

(3) P が C 上を動くとき，AP を最小にする P の座標，および AP を最大にする P の座標を求めよ．

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ を求めよ．

(2) 実数 a に対して定積分 $\displaystyle\int_0^2 \left|\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{1+e^a}\right|dx$ の値を $S(a)$ とおく．a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

0000370369269999

京都工芸繊維大学

2010 年 第 4 問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ を求めよ．

(2) 実数 a に対して定積分 $\displaystyle\int_0^2 \left|\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{1+e^a}\right| dx$ の値を $S(a)$ とおく．a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx$

$\displaystyle = \int 1-\frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

$= \underline{x-\log(1+e^x)+C \quad (C\text{は積分定数})}$ //

ポイント

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|+C$

$1+e^x \geqq 2>0$ より，ここでは絶対値の中身は正である．

(2) $\dfrac{1}{1+e^x}$ は単調減少の関数で，$\dfrac{1}{1+e^x}=\dfrac{1}{1+e^a}$ となるのは，$x=a$ のときであるから，

$0\leqq x\leqq a$ では，$\dfrac{1}{1+e^x}-\dfrac{1}{1+e^a}\geqq 0$

$x>a$ では，$\dfrac{1}{1+e^x}-\dfrac{1}{1+e^a}<0$ となる．

よって，$\displaystyle S(a)=\int_0^a \frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{1+e^a}\,dx+\int_a^2 \frac{1}{1+e^a}-\frac{1}{1+e^x}\,dx$

$\displaystyle = \left[x-\log(1+e^x)-\frac{x}{1+e^a}\right]_0^a+\left[\frac{x}{1+e^a}-x+\log(1+e^x)\right]_a^2$

$\displaystyle = a-\log(1+e^a)-\frac{a}{1+e^a}+\log 2+\frac{2}{1+e^a}-2+\log(1+e^2)-\frac{a}{1+e^a}+a-\log(1+e^a)$

$\displaystyle = \frac{2-2a}{1+e^a}-2\log(1+e^a)+\log(1+e^2)+2a-2+\log 2$

$\displaystyle \therefore S'(a)=\frac{-2(1+e^a)-(2-2a)e^a}{(1+e^a)^2}-\frac{2e^a}{1+e^a}+2$

$\displaystyle = \frac{2e^a(a-1)}{(1+e^a)^2}$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\displaystyle S(1)=-2\log(1+e)+\log(1+e^2)+\log 2=\log\frac{2(1+e^2)}{(1+e)^2}$

$\therefore$ 右の増減表より，$S(a)$ の最小値は，

$\displaystyle \underline{S(1)=\log\frac{2(1+e^2)}{(1+e)^2}}$ //