$\boxed{1}$ 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3-2a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n に対し，a_n は $\dfrac{1}{3} \leqq a_n < \dfrac{1}{2}$ を満たす有理数であることを示せ．

(2) 一般項 a_n を $a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$（ただし，p_n，q_n は互いに素な自然数）と既約分数で表したとき，p_{n+1} を p_n と q_n で，q_{n+1} を p_n と q_n でそれぞれ表せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

$\boxed{2}$ さいころを n 回ふり，n 個の出た目の数をすべて掛け合わせた値を a_n とする．次の問いに答えよ．

(1) a_n が素数となる確率を n を用いて表せ．

(2) a_n が 3 の倍数となる確率を n を用いて表せ．

(3) a_n を 6 で割った余りが 1 となる確率を n を用いて表せ．

(4) $a_n < 10$ となる確率を $n=1$，$n=2$ のときに求め，$n \geqq 3$ のときは n を用いて表せ．

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + x$ を考える．ここで，a，b は実数とする．今，曲線 $y = f(x)$ が，ある直線 ℓ に 2 点で接しており，その 2 つの接点の x 座標が -1 と 1 であることがわかっている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 定数 a，b の値と，直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 直線 ℓ と同じ傾きを持ち，曲線 $y = f(x)$ と接する直線が ℓ の他にもう 1 つある．その直線の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた直線と曲線 $y = f(x)$ とにより囲まれた領域のうち x 座標が 0 以上の部分の面積を求めよ．