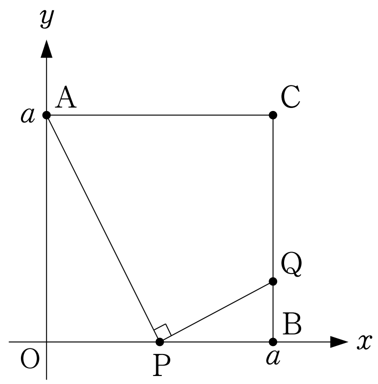
1 正の定数 a に対して，3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(a,\ 0)$，$\mathrm{C}(a,\ a)$ をとる．線分 OB 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ と線分 BC 上の点 Q において，

$$\angle\mathrm{APQ} = 90^\circ$$

が成り立つとき，次の問に答えよ．ただし，$0 < t < a$ とする．



(1) 三角形 PBQ の面積 S を a と t を用いて表せ．

(2) S の最大値とそのときの t の値を a を用いて表せ．

（佐賀大学　2017）

2 a は 0 でない実数とし，関数 $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}(a^2 - 2a)x^2 + 3(a^2 - a^3)x + 5a^3$ の極小値を m とする．

(1) $m = -\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a^{\boxed{\text{ウ}}} + \boxed{\text{エ}}\,a^{\boxed{\text{オ}}}$ である．

(2) m は $a = \boxed{\text{カ}}$ のとき，最大値 $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる．

(3) a が (2) の値のとき，$f(x)$ は $x = \boxed{\text{コサ}}$ で，極大値 $\boxed{\text{シスセ}}$ をとる．

（北海道薬科大学　2017）

3 $a \geqq 0$ を満たす実数 a に対して，関数

$$f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

の $-1 \leqq t \leqq a$ における最大値を $g(a)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $g(2)$ と $g(5)$ を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq 5$ の範囲で $y = g(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) $y = g(x)$ のグラフと x 軸および直線 $x = 5$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

（和歌山大学　2016）

4 実数 a に対して，関数 $f(x) = x^4 + \dfrac{8}{3}ax^3 - 2x^2 - 8ax$ が $x = X$ で極大値 Y をとるとする．a の値が変化するとき，点 $(X,\ Y)$ が描く軌跡を図示せよ．

（東京学芸大学　2016）

2016年 文系 第4問

$\boxed{4}$ $a \geqq 0$ を満たす実数 a に対して，関数

$$f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

の $-1 \leqq t \leqq a$ における最大値を $g(a)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $g(2)$ と $g(5)$ を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq 5$ の範囲で $y = g(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) $y = g(x)$ のグラフと x 軸および直線 $x = 5$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(1) $f'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

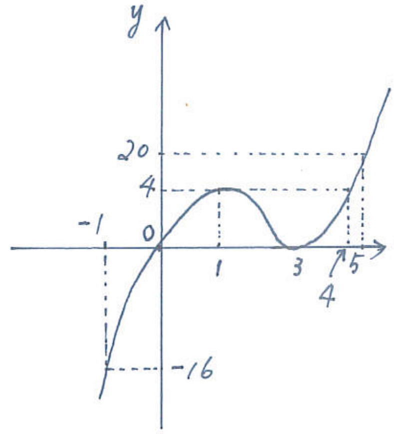
$= 3(t^2 - 4t + 3)$

$= 3(t-3)(t-1)$

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

$\therefore$ $y = f(t)$ のグラフは増減表より

右のようになる.



よって. $\underline{g(2) = 4,\ g(5) = 20}$ //

(2) $0 \leqq x < 1$ のとき. $g(x) = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f(t) = 4 \iff t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$

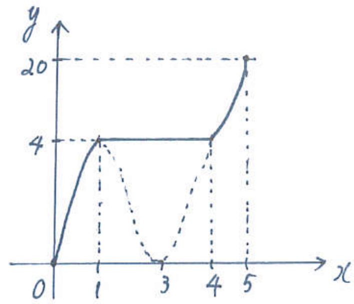
$\iff (t-1)^2(t-4) = 0$

$\iff t = 1, 4$

$\therefore$ $1 \leqq x < 4$ のとき $g(x) = 4$

$4 \leqq x \leqq 5$ のとき. $g(x) = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

以上より. $y = g(x)$ のグラフは右のようになる.



(3) $S = \int_0^1 x^3 - 6x^2 + 9x\,dx + 3 \cdot 4 + \int_4^5 x^3 - 6x^2 + 9x\,dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^1 + 12 + \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_4^5$

$= \frac{11}{4} + 12 + \frac{43}{4}$ $= \underline{\frac{51}{2}}$ //

2016年 第3問

$\boxed{3}$ 実数 a に対して，関数 $f(x)=x^4+\dfrac{8}{3}ax^3-2x^2-8ax$ が $x=X$ で極大値 Y をとるとする．a の値が変化するとき，点 $(X,\ Y)$ が描く軌跡を図示せよ．

$$f'(x)=4x^3+8ax^2-4x-8a$$
$$=4x^2(x+2a)-4(x+2a)$$
$$=4(x+1)(x-1)(x+2a)$$

$\therefore$ $f'(x)=0$ となるのは，$x=\pm1,\ -2a$

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
				極大			

(i) $-2a<-1$ すなわち $a>\dfrac{1}{2}$ のとき．

右の増減表より，$x=-1$ で極大値 $1-\dfrac{8}{3}a-2+8a=\dfrac{16}{3}a-1$ をとる．

よって，$X=-1$，$Y=\dfrac{16}{3}a-1$　軌跡は $X=-1$ （ただし，$Y>\dfrac{5}{3}$）

(ii) $-1<-2a<1$ すなわち，$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$ のとき．

同様にすると，$x=-2a$ で 極大値 $f(-2a)=16a^4-\dfrac{64}{3}a^4-8a^2+16a^2=-\dfrac{16}{3}a^4+8a^2$ をとる．

よって，$X=-2a$，$Y=-\dfrac{16}{3}a^4+8a^2$　軌跡は，$Y=-\dfrac{1}{3}X^4+2X^2$ $(-1<X<1)$

(iii) $-2a>1$ すなわち $a<-\dfrac{1}{2}$ のとき

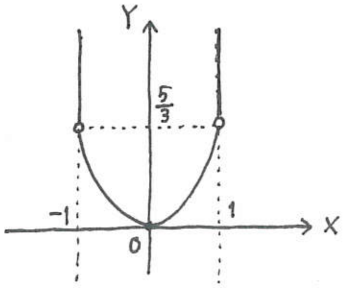
同様にすると，$x=1$ で 極大値 $f(1)=1+\dfrac{8}{3}a-2-8a=-\dfrac{16}{3}a-1$ をとる

よって，$X=1$，$Y=-\dfrac{16}{3}a-1$　軌跡は，$X=1$ （ただし，$Y>\dfrac{5}{3}$）

(i)～(iii) と $g(x)=-\dfrac{1}{3}x^4+2x^2$ とおいて $y=g(x)$ のグラフをかくことで (X,Y) が描く軌跡がえられる

$$g'(x)=-\frac{4}{3}x^3+4x=-\frac{4}{3}x(x^2-3)=-\frac{4}{3}x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\left(\frac{5}{3}\right)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{5}{3}\right)$



$\therefore$ 求める軌跡は上のようになる（白丸は除く）