＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 関数

$$f(x) = \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x - \sin 2x$$

に対して，以下の問いに答えなさい．

(1) $t = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくとき，$f(x)$ を t の式で表しなさい．

(2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めなさい．

(3) 方程式 $f(x) = a$ が $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で相異なる 2 つの解をもつための実数 a の条件を求めなさい．

（首都大学東京　2015）

$\boxed{2}$ AB ＝ AC ＝ 8 である二等辺三角形 ABC がある．点 P は辺 BC 上にあり，$\angle\mathrm{BAP} = \theta$，$\angle\mathrm{PAC} = 2\theta$，$\cos\theta = \dfrac{7}{8}$ であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) BC の長さを求めよ．

(2) BP : PC を求めよ．

(3) AP の長さを求めよ．

（静岡大学　2014）

$\boxed{3}$ a を実数とする．x の 2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ の区間 $a - 1 \leqq x \leqq a + 1$ における最小値を $m(a)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ．

(3) a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ．

（岡山大学　2017）

2015年 理系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数

$$f(x) = \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x - \sin 2x$$

に対して，以下の問いに答えなさい．

(1) $t = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくとき，$f(x)$ を t の式で表しなさい．

(2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めなさい．

(3) 方程式 $f(x) = a$ が $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で相異なる2つの解をもつための実数 a の条件を求めなさい．

(1) $t = \cos x \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) \quad \cdots ①$

$\therefore\ t^2 = \dfrac{1}{2}(1 - \sin 2x)$

$\therefore\ \sin 2x = 1 - 2t^2 \quad \cdots ②$

①，②より．$f(x) = -2t - (1 - 2t^2)$

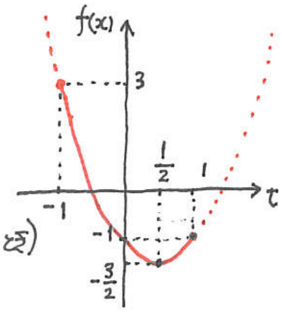
$\therefore\ \underline{f(x) = 2t^2 - 2t - 1}$ //

(2) $t = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ より．$-1 \leqq t \leqq 1$

(1)より $f(x) = 2\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{2}$

$t = -1 \iff x = \dfrac{3}{4}\pi + 2n\pi$

$t = \dfrac{1}{2} \iff x = \dfrac{1}{12}\pi + 2n\pi,\ \dfrac{17}{12}\pi + 2n\pi$



$\therefore$ 最大値は 3 $\left(x = \dfrac{3}{4}\pi + 2n\pi \text{ のとき}\right)$

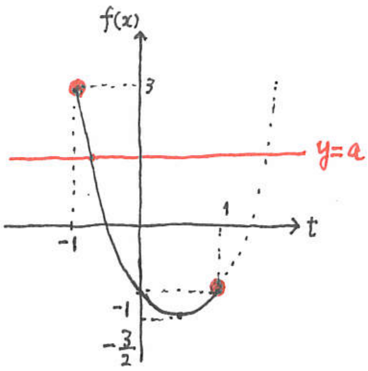
最小値は $-\dfrac{3}{2}$

$\left(x = \dfrac{\pi}{12} + 2n\pi,\ \dfrac{17}{12}\pi + 2n\pi \text{ のとき}\right)$ (nは整数) //

(3) $t = \pm 1$ のとき．(右図の赤点)は交点が1つの解に対応し．

その他の交点は 2つの解に対応するので，

$\underline{a = -\dfrac{3}{2},\ -1 < a < 3}$ //



静岡大学

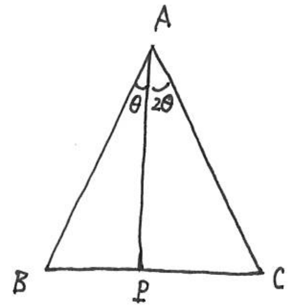
2014年 第1問

$\boxed{1}$ AB $=$ AC $= 8$ である二等辺三角形 ABC がある．点 P は辺 BC 上にあり，$\angle\mathrm{BAP} = \theta$，$\angle\mathrm{PAC} = 2\theta$，$\cos\theta = \dfrac{7}{8}$ であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) BC の長さを求めよ．

(2) BP : PC を求めよ．

(3) AP の長さを求めよ．



(1) 3倍角の公式より $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \dfrac{7}{128}$

$\therefore$ 余弦定理より．$BC^2 = 8^2 + 8^2 - 2\cdot 8\cdot 8\cdot \dfrac{7}{128}$

$= 121$

$\therefore \underline{BC = 11}$ //

(2) $\triangle ABP : \triangle APC = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot AP\cdot \sin\theta : \frac{1}{2}\cdot AP\cdot 8\cdot \sin 2\theta$

$= \sin\theta : \sin 2\theta$

$= \sin\theta : 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 : 2\cos\theta$

$= 1 : \dfrac{7}{4}$

$= 4 : 7$

$\therefore$ 一方．$\triangle ABP : \triangle APC = BP : PC$ より． $\underline{BP : PC = 4 : 7}$ //

(3) 余弦定理より

$BP^2 = 8^2 + AP^2 - 2\cdot 8\cdot AP\cdot \cos\theta$

(2) より $BP = 4$ より． $16 = 64 + AP^2 - 14AP$

$\therefore AP^2 - 14AP + 48 = 0$

$(AP - 6)(AP - 8) = 0$

$AP < AB = 8$ より $\underline{AP = 6}$ //

2017年 文系 第3問

増田

$\boxed{3}$ aを実数とする．xの2次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1 \leqq x \leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ．

(3) a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ．

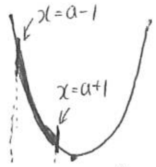
(1) $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+1$ の 区間 $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ における 最小値を求める。

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+1-\frac{1}{16}$$
$$=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}$$

$f(x)$ は $x=-\frac{1}{4}$ のとき 最小値 $\frac{15}{16}$ をもつ。 $\therefore\ \underline{m\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{16}}$ //

(2) $f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+1-\frac{a^2}{4}$

区間が 頂点 $x=-\frac{a}{2}$ より左にあるか、右にあるか、頂点を含むかで 場合分けする。



$x=-\frac{a}{2}$
(左にある場合)

i) $a+1<-\frac{a}{2}$ つまり $a<-\frac{2}{3}$ のとき

$$m(a)=f(a+1)$$
$$=(a+1)^2+a(a+1)+1$$
$$=2a^2+3a+2$$

ii) $-\frac{a}{2} \leqq a-1$ つまり $a \geqq \frac{2}{3}$ のとき

$$m(a)=f(a-1)$$
$$=(a-1)^2+a(a-1)+1$$
$$=2a^2-3a+2$$

iii) $-\frac{2}{3} \leqq a < \frac{2}{3}$ のとき (頂点が最小)

$$m(a)=f\left(-\frac{a}{2}\right)$$
$$=1-\frac{a^2}{4}$$

以上より

$$m(a)=\begin{cases} 2a^2+3a+2 & \left(a<-\frac{2}{3}\right) \\ 1-\frac{a^2}{4} & \left(-\frac{2}{3} \leqq a < \frac{2}{3}\right) \\ 2a^2-3a+2 & \left(a \geqq \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$ //

(3)
$$m'(a)=\begin{cases} 4a+3 & \Rightarrow a=-\frac{3}{4} \text{ で最小} \\ -\frac{a}{2} & \Rightarrow a=0 \text{ で最大} \\ 4a-3 & \Rightarrow a=\frac{3}{4} \text{ で最小} \end{cases}$$

$m(a)$ は 区間の境界 $\left(a=\pm\frac{2}{3}\right)$ で なめらかにつながっているので、最小値の候補は $m\left(-\frac{3}{4}\right)$ か $m\left(\frac{3}{4}\right)$

$$m\left(-\frac{3}{4}\right)=2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+2$$
$$=\frac{7}{8}$$

$$m\left(\frac{3}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2-3\left(\frac{3}{4}\right)+2$$
$$=\frac{7}{8}$$

よって $m(a)$ の最小値は $\underline{\frac{7}{8}}$ //

そのとき $a=\pm\frac{3}{4}$