＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ b，c を実数，q を正の実数とする．放物線 $P : y=-x^2+bx+c$ の頂点の y 座標が q のとき，放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いてあらわせ．

（大阪大学　2017）

$\boxed{2}$ $0 \leqq t \leqq 1$ とし，関数 $f(x)=x^2-4|x-1|$ に対して，

$$S(t)=\int_t^{2t} f(x)\,dx$$

とする．

(1) $y=f(x)$ のグラフをかきなさい．

(2) $S(t)$ を求めなさい．

(3) $S(t)$ の最大値と最小値を求めなさい．

（大分大学　2017）

$\boxed{3}$ a を実数とする．座標平面内の曲線 $C : y=x^3-ax$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $a=5$ のとき，C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものの方程式を求めよ．

(2) C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものが 3 本存在するような a の範囲を求めよ．

（岡山大学　2017）

大阪大学

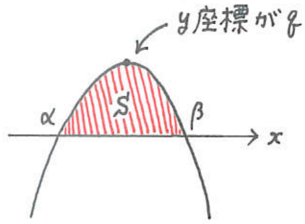
2017年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ b, c を実数, q を正の実数とする. 放物線 $P: y = -x^2 + bx + c$ の頂点の y 座標が q のとき, 放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いてあらわせ.

P と x 軸との交点の x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とおくと, 解と係数の関係より,

$\alpha + \beta = b$, $\alpha\beta = -c$ $\cdots (*)$ となる.



$$S = \int_\alpha^\beta -x^2 + bx + c\, dx$$

$$= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx$$

$\downarrow$ $\frac{1}{6}$ 公式

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \quad \cdots (**)$$

ここで $(*)$ を使うと,

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= b^2 + 4c$$

$\therefore$ $\beta - \alpha > 0$ より, $\beta - \alpha = \sqrt{b^2 + 4c}$

$y = -(x - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}b^2 + c$ となるので, $q = \frac{1}{4}b^2 + c$

$\therefore$ $\beta - \alpha = 2\sqrt{q}$

$(**)$ に代入して,

$$\underline{S = \frac{4}{3} q\sqrt{q}}$$ //

2017年 経済学部 第2問　1枚目 / 2　増田

$\boxed{2}$ $0 \leqq t \leqq 1$とし，関数 $f(x) = x^2 - 4|x-1|$ に対して，

$$S(t) = \int_t^{2t} f(x)\,dx$$

とする．

(1) $y = f(x)$のグラフをかきなさい．
(2) $S(t)$を求めなさい．
(3) $S(t)$の最大値と最小値を求めなさい．

(1) $|x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geqq 1 \text{のとき}) \\ -(x-1) & (x < 1 \text{のとき}) \end{cases}$

$x \geqq 1$のとき

$$f(x) = x^2 - 4(x-1) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

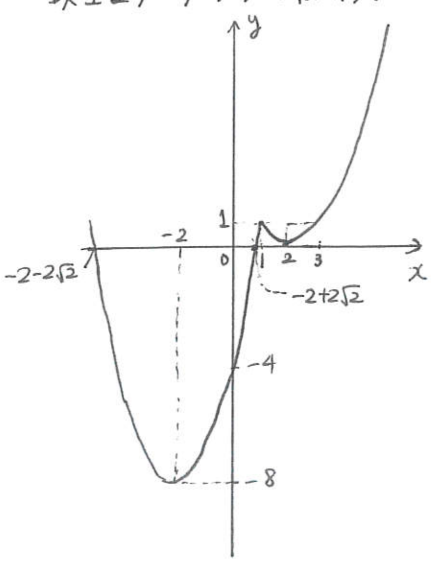
$x < 1$のとき

$$f(x) = x^2 + 4(x-1) = x^2 + 4x - 4 = (x+2)^2 - 8$$

$f(1) = 1$

$f(0) = -4$

以上より グラフの概形は



x軸との交点は

$x^2 + 4x - 4 = 0$

$x = -2 \pm \sqrt{4+4}$

$= -2 \pm 2\sqrt{2}$

(2) 積分範囲が 1以上も含まれるかどうかで場合分け

$0 \leqq t < \frac{1}{2}$のとき、$2t < 1$であるので、積分範囲は 1より小さい

$$S(t) = \int_t^{2t} \{x^2 + 4x - 4\}\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x\right]_t^{2t} = \frac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t$$

$\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$のとき、積分範囲は 1以上も含まれる.

$$S(t) = \int_t^1 (x^2 + 4x - 4)\,dx + \int_1^{2t} (x^2 - 4x + 4)\,dx = \frac{7}{3}t^3 - 10t^2 + 12t - 4$$

まとめると、

$0 \leqq t < \frac{1}{2}$のとき

$$S(t) = \frac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t$$

$\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$のとき

$$S(t) = \frac{7}{3}t^3 - 10t^2 + 12t - 4$$

2017年 経済学部 第2問　　2枚目 / 2　　増田

$\boxed{2}$ $0 \leqq t \leqq 1$ とし，関数 $f(x) = x^2 - 4|x-1|$ に対して，

$$S(t) = \int_t^{2t} f(x)\,dx$$

とする．

(1) $y = f(x)$ のグラフをかきなさい．
(2) $S(t)$ を求めなさい．
(3) $S(t)$ の最大値と最小値を求めなさい．

(3) $0 \leqq t < \frac{1}{2}$ のとき

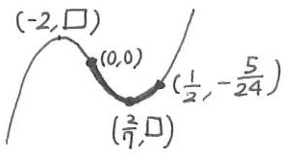
$S_1(t) = \frac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t$ とおく。

$S_1'(t) = 7t^2 + 12t - 4$
$= (t+2)(7t-2)$

$S_1'(t) = 0$ となるのは
$t = -2,\ \frac{2}{7}$

また、$S_1(0) = 0$
$S_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{24}$

グラフの概形は



$\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき

$S_2(t) = \frac{7}{3}t^3 - 10t^2 + 12t - 4$ とおく。

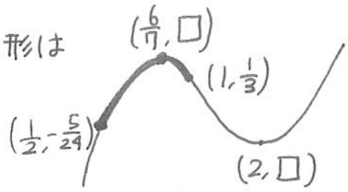
$S_2'(t) = 7t^2 - 20t + 12$
$= (t-2)(7t-6)$

$S_2'(t) = 0$ となるのは $t = \frac{6}{7},\ 2$

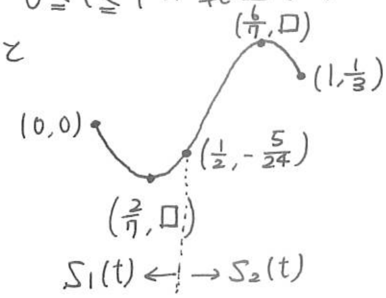
また、$S_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{24}$

$S_2(1) = \frac{1}{3}$

グラフの概形は



以上より $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲でグラフをつなげると



最大値は $S_2\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{20}{49}$ //

最小値は $S_1\left(\frac{2}{7}\right) = -\frac{88}{147}$ //

0002377812267999

岡山大学

2017年 文系 第1問

増田

$\boxed{1}$ aを実数とする．座標平面内の曲線$C : y = x^3 - ax$について，以下の問いに答えよ．

(1) $a = 5$のとき，Cの接線で点$(1,\ 0)$を通るものの方程式を求めよ．

(2) Cの接線で点$(1,\ 0)$を通るものが3本存在するようなaの範囲を求めよ．

(1) $a=5$のとき $y=f(x)=x^3-5x$
とおく。

$$f'(x)=3x^2-5$$

接点のx座標をtとおくと，接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-(t^3-5t)=(3t^2-5)(x-t) \quad \cdots(*)$$

これが$(x,y)=(1,0)$を通るので，

$$-(t^3-5t)=(3t^2-5)(1-t)$$

$$2t^3-3t^2+5=0$$

$t=-1$を代入すると成り立つため，
$(t+1)$を因数にもつ。

$$(t+1)(2t^2-5t+5)=0$$

判別式 $D=25-4\cdot2\cdot5<0$
のため解なし

$$\therefore t=-1$$

$t=-1$を$(*)$に代入して

$$y-(-1+5)=(3-5)(x+1)$$

$$\underline{y=-2x+2}_{/\!/}$$

(2) $f(x)=x^3-ax$ とおく。(1)と同様に，接点のx座標をtとおくと，接線の方程式は

$$y-(t^3-at)=(3t^2-a)(x-t)$$

これが$(x,y)=(1,0)$を通るので

$$-(t^3-at)=(3t^2-a)(1-t)$$

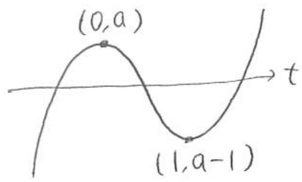
$$2t^3-3t^2+a=0$$

$g(t)=2t^3-3t^2+a$ とおき，
グラフ$y=g(t)$がt軸と異なる3つの交点をもつ範囲を求める。

$$g'(t)=6t^2-6t$$
$$=6t(t-1)$$

$$g'(t)=0 \iff t=0,1$$

$g(0)=a$
$g(1)=a-1$



右図より，

$a>0$ かつ $a-1<0$

のとき，$y=g(t)$はt軸と異なる3点で交わる。

$$\therefore \underline{0<a<1}_{/\!/}$$