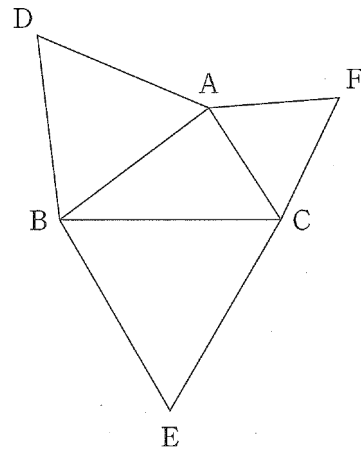
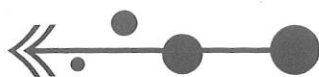


- 1 下図のように、 $\triangle ABC$ の外部に3点D, E, Fを $\triangle ABD$, $\triangle BCE$, $\triangle CAF$ がそれぞれ正三角形になるようにとる。 $\triangle ABC$ の面積を S , 3辺の長さを $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とおくとき、以下の問いに答えよ。



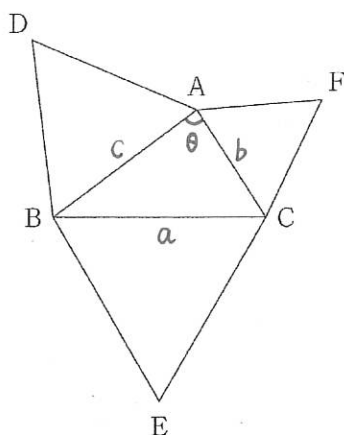
- (1) $\angle BAC = \theta$ とおくとき、 $\sin \theta$ を b, c, S を用いて、 $\cos \theta$ を a, b, c を用いて表せ。
- (2) DC^2 を a, b, c, S を用いて表し、 $DC^2 = EA^2 = FB^2$ が成り立つことを示せ。
- (3) 3つの正三角形の面積の平均を T とおくとき、 DC^2 を S と T を用いて表せ。

(熊本大学 2016)



2016 年 文 系 第 1 問

1 下図のように、 $\triangle ABC$ の外部に 3 点 D, E, F を $\triangle ABD, \triangle BCE, \triangle CAF$ がそれぞれ正三角形になるようにとる。 $\triangle ABC$ の面積を S 、3 辺の長さを $BC = a, CA = b, AB = c$ とおくと、以下の問いに答えよ。



(1) $\angle BAC = \theta$ とおくと、 $\sin \theta$ を b, c, S を用いて、 $\cos \theta$ を a, b, c を用いて表せ。

(2) DC^2 を a, b, c, S を用いて表し、 $DC^2 = EA^2 = FB^2$ が成り立つことを示せ。

(3) 3 つの正三角形の面積の平均を T とおくと、 DC^2 を S と T を用いて表せ。

$$(1) S = \frac{1}{2} bc \sin \theta \text{ より, } \underline{\sin \theta = \frac{2S}{bc}} \quad \text{余弦定理より, } \underline{\cos \theta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} //$$

(2) 余弦定理より、

$$\begin{aligned} DC^2 &= c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos(\theta + 60^\circ) \\ &= c^2 + b^2 - 2bc \cdot \left(\cos \theta \cdot \frac{1}{2} - \sin \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= c^2 + b^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \sqrt{3} \cdot 2S \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}S \end{aligned}$$

$\triangle ADC$ と $\triangle ABF$ において、 $AD = AB, AC = AF$

$$\angle DAC = \angle BAF (= \theta + 60^\circ)$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ABF$$

$$\text{よって, } DC = FB \text{ より, } DC^2 = FB^2$$

$\triangle DBC$ と $\triangle ABE$ において、 $DB = AB, BC = BE$

$$\angle DBC = \angle ABE (= \angle ABC + 60^\circ)$$

$$\therefore \triangle DBC \cong \triangle ABE$$

$$\text{よって, } DC = AE \text{ より, } DC^2 = EA^2$$

$$\text{以上より, } DC^2 = EA^2 = FB^2 \quad \blacksquare$$

$$\begin{aligned} (3) T &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} b^2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} c^2 \sin 60^\circ \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} (a^2 + b^2 + c^2) \\ \therefore a^2 + b^2 + c^2 &= 4\sqrt{3}T \\ \underline{DC^2 = 2\sqrt{3}(S + T)} // \end{aligned}$$