$\boxed{1}$ 座標空間の４点

$$\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right),\ \mathrm{B}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{C}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right),\ \mathrm{D}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$$

に対し，

$$\overrightarrow{p}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \overrightarrow{q}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

とおく．ただし，Oは原点，sとtは実数とする．

(1) $\left|\overrightarrow{p}\right|$，$\left|\overrightarrow{q}\right|$と内積$\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}$を$s$，$t$で表せ．

(2) $t=\frac{1}{2}$のとき，ベクトル$\overrightarrow{p}$と$\overrightarrow{q}$のなす角が$\frac{3}{4}\pi$となるようなsの値を求めよ．

(3) sとtが実数を動くとき，$\left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{q}\right|$の最小値を求めよ．

（北海道大学　2018）

$\boxed{2}$ 四面体OABCにおいて，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\pi}{3}$であるとする．次の問に答えよ．

(1) 頂点Cから三角形OABを含む平面に下ろした垂線をCDとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ．

(2) 四面体OABCの体積を求めよ．

（早稲田大学　2017）

$\boxed{3}$ 三角形OABにおいて，辺ABを$1:2$に内分する点をO$'$，辺BOを$1:2$に内分する点をA$'$，辺OAを$1:2$に内分する点をB$'$とし，線分AA$'$とBB$'$の交点をP，BB$'$とOO$'$の交点をQ，OO$'$とAA$'$の交点をRとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) $\mathrm{OR}:\mathrm{RO'}=6:1$となることを示せ．

(3) 三角形PQRの面積Mを三角形OABの面積Sを用いて表せ．

（大阪市立大学　2017）

$\boxed{4}$ sを正の実数とする．鋭角三角形ABCにおいて，辺ABを$s:1$に内分する点をDとし，辺BCを$s:3$に内分する点をEとする．線分CDと線分AEの交点をFとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$とするとき，$\alpha$と$\beta$を求めよ．

(2) Fから辺ACに下ろした垂線をFGとする．FGの長さが最大となるときのsを求めよ．

（東北大学　2017）

$\boxed{5}$ 平面上に三角形OABがあり，点 A′，B′ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}'} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'} = 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たしているとする．線分 A′B′ を 2：1 に内分する点を P とし，線分 OP と線分 AB の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ および $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$ を求めよ．

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}$ であり，さらに $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が直交しているとき，三角形OABの面積および三角形PABの面積を求めよ．

（佐賀大学　2017）

$\boxed{6}$ t を $0 < t < \dfrac{1}{2}$ をみたす実数とする．三角形 OAB において，辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を O′，辺 BO を $t:(1-t)$ に内分する点を A′，辺 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を B′ とし，線分 AA′ と BB′ の交点を P，BB′ と OO′ の交点を Q，OO′ と AA′ の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ．

(2) OR : RO′ を t を用いて表せ．

(3) 三角形 PQR の面積 M を三角形 OAB の面積 S と t を用いて表せ．

（大阪市立大学　2017）

$\boxed{7}$ 空間内の 3 点 A，B，C を頂点とする $\triangle$ABC を考える．2 辺 BC，AC の中点をそれぞれ M，N とし，中線 AM と BN の交点を G とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(2) 2 点 P，Q が $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を満たすとき，3 点 P，Q，G は同一直線上にあることを示せ．

(3) $\triangle$ABC の頂点の座標が A$(0,\ 0,\ 1)$，B$(7,\ 0,\ 6)$，C$(2,\ 12,\ 5)$ であるとき，xy 平面上を動く点 P$(x,\ y,\ 0)$ を考える．このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ の最小値とそのときの P の座標を求めよ．

(4) (3)において，特に点 P$(x,\ y,\ 0)$ が，xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くものとする．$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ の最大値とそのときの P の座標，および最小値とそのときの P の座標を，それぞれ求めよ．

（長崎大学　2017）

$\boxed{8}$ 原点をOとする座標空間内に3点 $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 4,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ c)$ がある．ただし，$c > 0$ とする．$\angle BAC = \theta$ とし，$\triangle ABC$ の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\cos\theta$, $\sin\theta$ を c を用いて表せ．

(2) 点Oを中心とする半径1の球面上の点をHとする．ベクトル $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HC}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{OH}$ に垂直であるとき，c の値を求めよ．

(3) (2)の条件のもとで，面積 S を求めよ．

（熊本大学　2017）

$\boxed{9}$ 空間の 3 点 $(-2,\ 0,\ 0)$, $(0,\ -1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 2)$ を通る平面を α とする．α 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{p} = (1,\ 1,\ -3)$ に平行な直線を ℓ とする．ℓ と xy 平面との交点を B とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 B の座標を求めよ．

(2) 平面 α に垂直で，大きさが 1 のベクトル $\overrightarrow{q}$ を求めよ．

(3) 線分 AB 上の点 C を中心とする半径 3 の球を平面 α で切る．切り口の面積が 8π であるとき，点 C の座標を求めよ．

（兵庫県立大学　2017）

$\boxed{10}$ 1辺の長さが2の正三角形とその内接円の接点を A，B，C とする．点 P が内接円の円周上にあるとき，次の問いに答えよ．

(1) 内接円の中心を O とするとき，線分 OA の長さを求めよ．

(2) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$ の値を求めよ．

(3) $|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2$ の値を求めよ．

(4) 点 P が円周上を動くとき，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ の最大値および最小値を求めよ．

（徳島大学　2017）

$\boxed{11}$ $\triangle$ABCにおいて，AB $=6$，BC $=5$，CA $=4$とする．辺BCの垂直二等分線と辺CAの垂直二等分線との交点をD，$\angle$Cの二等分線と辺ABとの交点をEとする．また，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|$を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．また，内積$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$を求めよ．

(4) 点Dから線分CEに下ろした垂線と線分CEとの交点をPとする．$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

（山形大学　2017）

早稲田大学

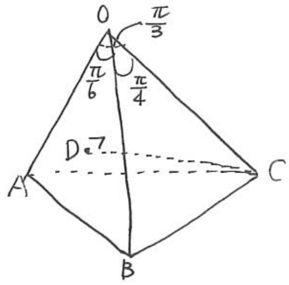
2017年 教育 第3問

増田

$\boxed{3}$ 四面体OABCにおいて，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，$\angle AOB=\frac{\pi}{6}$，$\angle BOC=\frac{\pi}{4}$，$\angle COA=\frac{\pi}{3}$ であるとする．次の問に答えよ．

(1) 頂点Cから三角形OABを含む平面に下ろした垂線をCDとするとき，$\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

(2) 四面体OABCの体積を求めよ．



(1) 点Dは平面OAB上にあるので、実数 k, l を用いて

$$\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}$$

と表される。

$\overrightarrow{CD}\perp$ 平面OABより、

$$\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OA}=0 \cdots ① \\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \cdots ②\end{cases}$$

① $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OA}=(k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}$

$=k+l\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

ここで. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times1\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=1\times1\times\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\therefore \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OA}=k+\frac{\sqrt{3}}{2}l-\frac{1}{2}=0 \cdots ①'$

② $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OB}=(k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OB}$

$=k\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+l-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}k+l-\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \cdots ②'$

①', ②' を連立して解くと $k=2-\sqrt{6}$, $l=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$\therefore \underline{\overrightarrow{OD}=(2-\sqrt{6})\overrightarrow{OA}+(2\sqrt{2}-\sqrt{3})\overrightarrow{OB}}$ //

(2) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$

$=(2-\sqrt{6})\overrightarrow{OA}+(2\sqrt{2}-\sqrt{3})\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$|\overrightarrow{CD}|^2=(2-\sqrt{6})^2+(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+1$

$+2(2-\sqrt{6})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2}$

$+2(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(-1)\frac{\sqrt{2}}{2}$

$+2(2-\sqrt{6})(-1)\frac{1}{2}$

$=\sqrt{6}-2$

$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\sqrt{6}-2}$

また、△OABの面積は

(△OABの面積) $=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{4}$

以上より

(四面体OABCの体積) $=\frac{1}{4}\times\sqrt{\sqrt{6}-2}\times\frac{1}{3}$

$=\underline{\frac{\sqrt{\sqrt{6}-2}}{12}}$ //

2017年 教育学部 第1問

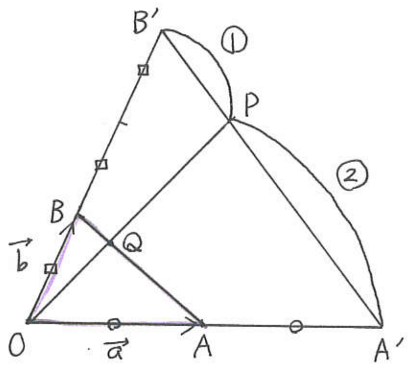
増田

1 平面上に三角形OABがあり，点A′，B′は$\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OB}$を満たしているとする．線分A′B′を2:1に内分する点をPとし，線分OPと線分ABの交点をQとする．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$および$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OQ}|}$を求めよ．

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}$であり，さらに$\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{AB}$が直交しているとき，三角形OABの面積および三角形PABの面積を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{OA'} + 2\overrightarrow{OB'}}{2+1}$

$= \dfrac{1}{3}(2\vec{a} + 2\times 3\vec{b})$

$= \dfrac{2}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$ //

(2) $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$ （k：実数）とおく。

$\overrightarrow{OQ} = \dfrac{2}{3}k\vec{a} + 2k\vec{b}$

Qは直線AB上にあるので、

$\dfrac{2}{3}k + 2k = 1$

$\therefore k = \dfrac{3}{8}$

$\overrightarrow{OQ} = \dfrac{3}{8}\overrightarrow{OP}$ より、$\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OQ}|} = \dfrac{3}{8}$ //

(3) $\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{AB}$が直交 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$
$\vec{a}\cdot\vec{b}$の値から、$\cos\angle BOA \to \sin\angle BOA$
を求める。

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{2}{3}\vec{a} + 2\vec{b}\right)\cdot(-\vec{a} + \vec{b})$

$= -\dfrac{2}{3}|\vec{a}|^2 - \dfrac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} + 2|\vec{b}|^2 = 0$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = 2$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle BOA = 2$ より

$\cos\angle BOA = \dfrac{2}{\sqrt{15}}$

$\sin\angle BOA = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{\sqrt{15}}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$

$\triangle OAB = \dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle BOA$

$= \dfrac{\sqrt{11}}{2}$ //

また、$\triangle OAB : \triangle PAB = OQ : QP$

$= 3 : 5$

$\triangle PAB = \dfrac{5}{3}\triangle OAB$

$= \dfrac{5\sqrt{11}}{6}$ //