

1 a を実数とする. 整式 $f(x)$ を $2x^2 + 3x - 2$ で割った余りは $6x + a$ であり, $x^3 - x + 6$ で割った余りは $5x^2 - ax - 8$ である.

- (1) a を求めよ.
- (2) $f(x)$ を $x^2 - 2x + 3$ で割った余りを求めよ.

(学習院大学 2018)

2 $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 3次方程式 $x^3 + 3x - 4 = 0$ の解を複素数の範囲で, すべて求めよ.
- (2) $\alpha^3 + 3\alpha$ は整数であることを示せ.
- (3) α は整数であることを示せ.

(和歌山大学 2017)

3 実数 x について, $A = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 5$, $B = x^2 + 2x + 2$ とおくと, 次の問いに答えよ.

- (1) 整式 A を整式 B で割った商と余りを求めよ.
- (2) A を B の2次式で表せ.
- (3) (2) で求めた式を用いて, $\frac{A}{B}$ の最小値と, そのときの x の値を求めよ.

(岩手大学 2017)

4 1辺の長さが1の正方形OABCにおいて, ABを $p:(1-p)$ に内分する点をM, BCを $(1-q):q$ に内分する点をNとする. また, $\triangle OMN$ の面積を S とする. ただし, $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ である.

- (1) S を p, q を用いて表せ.
- (2) $p = \frac{1-q}{1+q}$ のとき, S の最小値とそれを与える q の値を求めよ.

(滋賀県立大学 2016)

5 整数 a に対して $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - 1$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) $P(x)$ を $x - 1$ で割ったときの商を求めよ.
- (2) 3次方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ.
- (3) 3次方程式 $P(x) = 0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ.

(新潟大学 2015)

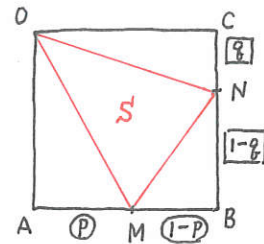
2016年 環境科学部・工学部 第3問



3 1辺の長さが1の正方形OABCにおいて、ABを $p:(1-p)$ に内分する点をM、BCを $(1-q):q$ に内分する点をNとする。また、 $\triangle OMN$ の面積をSとする。ただし、 $0 < p < 1$ 、 $0 < q < 1$ である。

(1) Sを p, q を用いて表せ。

(2) $p = \frac{1-q}{1+q}$ のとき、Sの最小値とそれを与える q の値を求めよ。



$$(1) S = (\text{正方形OABC}) - \triangle OAM - \triangle NMB - \triangle ONC$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot p - \frac{1}{2} \cdot (1-p)(1-q) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot q$$

$$= 1 - \frac{p}{2} - \frac{1}{2}(1-p-q+pq) - \frac{q}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1-pq)$$

(2) $p = \frac{1-q}{1+q}$ のとき

$$S = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{q(1-q)}{1+q} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{(1+q)(2-q)-2}{1+q} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(q-1 + \frac{2}{q+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(q+1 + \frac{2}{q+1} \right) - 1$$

$q+1 > 0$ より、相加・相乗平均の関係を使って

$$(q+1) + \frac{2}{q+1} \geq 2\sqrt{(q+1) \cdot \frac{2}{q+1}}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

(等号成立は $q+1 = \frac{2}{q+1}$)
すなわち、 $q = \sqrt{2}-1$ のとき

このとき p は、 $p = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

$$\therefore S \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} - 1$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

$\therefore S$ の最小値は $\sqrt{2}-1$ ($p=q=\sqrt{2}-1$ のとき)



2015年 第1問



1 整数 a に対して $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - 1$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を求めよ.
 (2) 3次方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ.
 (3) 3次方程式 $P(x) = 0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ.

(1) 実際に割り算を実行すると,

よって, 商は $\underline{x^2 + (1-a)x + 1}$ //

$$\begin{array}{r} x^2 + (1-a)x + 1 \\ x-1 \overline{) x^3 - ax^2 + ax - 1} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ (1-a)x^2 + ax - 1 \\ \underline{(1-a)x^2 + ax - x} \\ x - 1 \\ \underline{x - 1} \\ 0 \end{array}$$

(2) (1) より $P(x) = 0$ は次のように表される

$$(x-1) \{ \underline{x^2 + (1-a)x + 1} \} = 0$$

虚数解をもつ.

\therefore (中かこの中身) $= 0$ の判別式を D とおくと,

$$D = (1-a)^2 - 4 < 0 \quad \therefore (a-1)^2 < 4 \quad \therefore -2 < a-1 < 2 \text{ より}$$

$$-1 < a < 3 \quad a: \text{整数より, } \underline{a = 0, 1, 2} //$$

(3) $x^2 + (1-a)x + 1 = 0$ が整数の解のみをもてばよいので

解を α, β とおく 解と係数の関係より $\alpha\beta = 1$

α, β : 整数より, $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ または $(-1, -1)$

$$\therefore \alpha + \beta = a - 1 \quad \therefore a - 1 = 2, -2 \quad \therefore \underline{a = 3, -1} //$$