______ 年　番号 ______　氏名 ______________________________

$\boxed{1}$ a は正の数とし，次の関数 $y = f_a(x)$ のグラフの変曲点を P とする．

$$f_a(x) = axe^{-\frac{x}{a}} \quad (x \geqq 0)$$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) 点 P の座標を求めよ．

(2) a が区間 $1 \leqq a \leqq 2$ 全体を動くとき，点 P が描く曲線 C の概形を図示せよ．

(3) $x \geqq 0$ における曲線 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ と (2) の曲線 C の 3 曲線で囲まれた部分の面積を求めよ．

（岡山大学　2016）

2016年 理系 第3問

3 aは正の数とし，次の関数$y=f_a(x)$のグラフの変曲点をPとする．

$$f_a(x)=axe^{-\frac{x}{a}} \quad (x \geqq 0)$$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) 点Pの座標を求めよ．

(2) aが区間$1 \leqq a \leqq 2$全体を動くとき，点Pが描く曲線Cの概形を図示せよ．

(3) $x \geqq 0$における曲線$y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$と(2)の曲線Cの3曲線で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $f_a'(x)=(ax)'e^{-\frac{x}{a}}+ax(e^{-\frac{x}{a}})'$

$\qquad =(a-x)e^{-\frac{x}{a}}$

$f_a''(x)=(a-x)'e^{-\frac{x}{a}}+(a-x)(e^{-\frac{x}{a}})'$

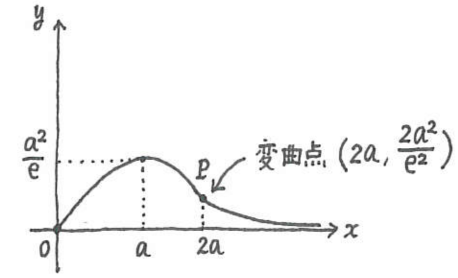
$\qquad =\left(\frac{x}{a}-2\right)e^{-\frac{x}{a}}$

よって，$f_a''(2a)=0$，$f_a'(2a)=-ae^{-2}<0$　よって，$\underline{P(2a,\ 2a^2e^{-2})}$ //

(2) (1)より増減表は次のようになる

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f_a'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f_a''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f_a(x)$	0	↗	$\frac{a^2}{e}$	↘	$\frac{2a^2}{e^2}$	↘

極大

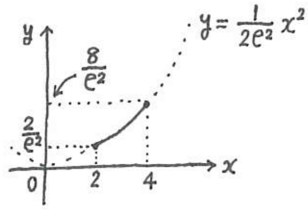


また，$\lim_{x\to\infty} f_a(x)=0$ より右のようになる．

$P(X,Y)$とおくと(1)より，$X=2a$，$Y=2a^2e^{-2}$

$1 \leqq a \leqq 2$より，$2 \leqq X \leqq 4$ でaを消去して，$Y=\frac{1}{2e^2}X^2$

∴ Cの概形は右図の実線部分(端点を含む)



(3) 右図より，

$S=\int_0^4 2xe^{-\frac{x}{2}}dx-\int_0^2 xe^{-x}dx-\int_2^4 \frac{1}{2e^2}x^2dx$

$=\left[-4xe^{-\frac{x}{2}}\right]_0^4-\int_0^4-4e^{-\frac{x}{2}}dx-\left[-xe^{-x}\right]_0^2+\int_0^2-e^{-x}dx-\left[\frac{x^3}{6e^2}\right]_2^4$

$=-16e^{-2}-\left[8e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^4+2e^{-2}+\left[e^{-x}\right]_0^2-\frac{32}{3}e^{-2}+\frac{4}{3}e^{-2}$

$=\underline{7-\frac{91}{3e^2}}$ //