＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ a を実数とする．x の 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1 \leqq x \leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ．

(3) a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ．

（岡山大学　2017）

$\boxed{2}$ k を定数とする．関数 $f(x)=x^2-kx+3k-5$ について，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x)=0$ が，異なる 2 つの実数解をもつような k の値の範囲を求めよ．

(2) 方程式 $f(x)=0$ が，ともに 2 以下となる異なる 2 つの解をもつような k の値の範囲を求めよ．

(3) $1 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最小値を $m(k)$ とする．このとき，$0 \leqq k \leqq 10$ における $m(k)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．

（滋賀大学　2016）

$\boxed{3}$ a，b を 1 より大きい定数とし，$\log_{ab} x+\log_{ab} y=2$ とする．

(1) xy を a，b の式で表しなさい．

(2) $ax+by$ の最小値を a，b の式で表しなさい．

(3) $(ax-1)^2+(by-1)^2$ の最小値を a，b の式で表しなさい．

（大分大学　2017）

2017年 文系 第3問

増田

$\boxed{3}$ aを実数とする．xの2次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1 \leqq x \leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ．

(3) a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ．

(1) $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+1$ の 区間 $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ における 最小値を求める。

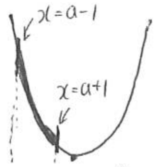
$$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+1-\frac{1}{16}$$
$$=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}$$

$f(x)$は $x=-\frac{1}{4}$ のとき 最小値 $\frac{15}{16}$ をもつ。

$$\therefore\ m\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{16}$$

(2) $f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+1-\frac{a^2}{4}$

区間が 頂点 $x=-\frac{a}{2}$ より左にあるか、右にあるか、頂点を含むかで場合分けする。



(左にある場合)

i) $a+1<-\frac{a}{2}$ つまり $a<-\frac{2}{3}$ のとき

$$m(a)=f(a+1)$$
$$=(a+1)^2+a(a+1)+1$$
$$=2a^2+3a+2$$

ii) $-\frac{a}{2} \leqq a-1$ つまり $a \geqq \frac{2}{3}$ のとき

$$m(a)=f(a-1)$$
$$=(a-1)^2+a(a-1)+1$$
$$=2a^2-3a+2$$

iii) $-\frac{2}{3} \leqq a < \frac{2}{3}$ のとき (頂点が最小)

$$m(a)=f\left(-\frac{a}{2}\right)$$
$$=1-\frac{a^2}{4}$$

以上より

$$m(a)=\begin{cases} 2a^2+3a+2 & \left(a<-\frac{2}{3}\right) \\ 1-\frac{a^2}{4} & \left(-\frac{2}{3} \leqq a < \frac{2}{3}\right) \\ 2a^2-3a+2 & \left(a \geqq \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

(3)

$$m'(a)=\begin{cases} 4a+3 & \Rightarrow a=-\frac{3}{4} \text{ で最小} \\ -\frac{a}{2} & \Rightarrow a=0 \text{ で最大} \\ 4a-3 & \Rightarrow a=\frac{3}{4} \text{ で最小} \end{cases}$$

$m(a)$は区間の境界 $\left(a=\pm\frac{2}{3}\right)$ でなめらかにつながっているので、最小値の候補は $m\left(-\frac{3}{4}\right)$ か $m\left(\frac{3}{4}\right)$

$$m\left(-\frac{3}{4}\right)=2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+2$$
$$=\frac{7}{8}$$

$$m\left(\frac{3}{4}\right)=2\left(\frac{3}{4}\right)^2-3\left(\frac{3}{4}\right)+2$$
$$=\frac{7}{8}$$

よって $m(a)$ の最小値は $\frac{7}{8}$

そのとき $a=\pm\frac{3}{4}$

2016年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ kを定数とする．関数 $f(x)=x^2-kx+3k-5$ について，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x)=0$ が，異なる2つの実数解をもつような k の値の範囲を求めよ．

(2) 方程式 $f(x)=0$ が，ともに2以下となる異なる2つの解をもつような k の値の範囲を求めよ．

(3) $1\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最小値を $m(k)$ とする．このとき，$0\leqq k\leqq 10$ における $m(k)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．

(1) $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ であるから

$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot(3k-5)$
$\quad=k^2-12k+20$
$\quad=(k-2)(k-10)$

$\therefore\ (k-2)(k-10)>0$

$\therefore\ k<2,\ 10<k$ // …①

(2) 2つの解を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

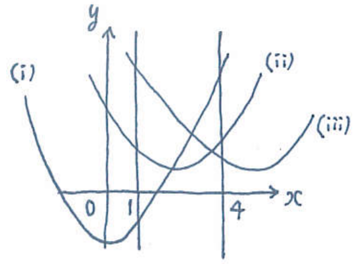
① かつ $(\alpha-2)+(\beta-2)\leqq 0$ かつ $(\alpha-2)(\beta-2)\geqq 0$

$(k<2,\ 10<k)$ かつ $\alpha+\beta\leqq 4$ かつ $\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\geqq 0$

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=k$，$\alpha\beta=3k-5$ であるから

$(k<2,\ 10<k)$ かつ $k\leqq 4$ かつ $k\geqq 1$

$\therefore\ 1\leqq k<2$ //



(3) 軸は $x=\dfrac{k}{2}$ であるから

(i) $0\leqq\dfrac{k}{2}<1$ すなわち $0\leqq k<2$ のとき，

$f(x)$ の最小値は $1\leqq x\leqq 4$ において，$m(k)=f(1)=2k-4$

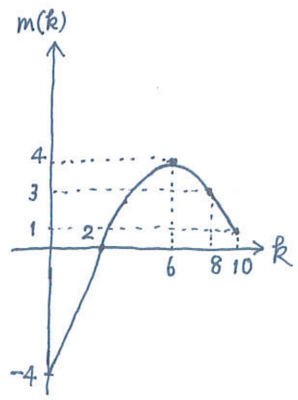
(ii) $1\leqq\dfrac{k}{2}\leqq 4$ すなわち $2\leqq k\leqq 8$ のとき，

$m(k)=f\left(\dfrac{k}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}k^2+3k-5=-\dfrac{1}{4}(k-6)^2+4$

(iii) $4<\dfrac{k}{2}\leqq 5$ すなわち $8<k\leqq 10$ のとき，

$m(k)=f(4)=-k+11$

(i)〜(iii)より，$y=m(k)$ のグラフは右のようになる



$\therefore$ 最大値 4 ($k=6$ のとき)，最小値 -4 ($k=0$ のとき) //

2017年 理工学部 第2問

増田

$\boxed{2}$ a, bを1より大きい定数とし，$\log_{ab} x + \log_{ab} y = 2$とする．

(1) xyをa, bの式で表しなさい．

(2) $ax + by$の最小値をa, bの式で表しなさい．

(3) $(ax-1)^2 + (by-1)^2$の最小値をa, bの式で表しなさい．

(1) $\log_{ab} x + \log_{ab} y$

$= \log_{ab}(xy) = 2$

$\underline{xy = (ab)^2 = a^2b^2}$ //

(2) 真数条件より $x>0$，$y>0$

$xy = a^2b^2$ より　$y = \dfrac{a^2b^2}{x}$　$(x \neq 0)$

$ax + by = ax + b\dfrac{a^2b^2}{x}$ …①

式①の各項は、$a>1$, $b>1$ と $x>0$, $y>0$ より正の値だから、相加・相乗平均を用いて

$$ax + \frac{a^2b^3}{x} \geqq \underbrace{2\sqrt{ax \times \frac{a^2b^3}{x}}}_{= 2ab\sqrt{ab}}$$

$ax+by$ は、$ax = \dfrac{a^2b^3}{x}$ つまり $x = b\sqrt{ab}$, $y = a\sqrt{ab}$

のとき 最小値 $\underline{2ab\sqrt{ab}}$ // をとる。

(3) $(ax-1)^2 + (by-1)^2$

$= (ax+by)^2 - 2(ax+by) - 2abxy + 2$

[$ax+by = A$ とおき、$xy = a^2b^2$ を代入]

$= A^2 - 2A - 2a^3b^3 + 2$

$= (A-1)^2 - 2a^3b^3 + 1$

いま、Aの最小値 $2ab\sqrt{ab}$ は 1より大きいので、$(A-1)^2$ の最小値は (2)と同じく $x = b\sqrt{ab}$, $y = a\sqrt{ab}$ のとき。

このとき求める $(ax-1)^2 + (by-1)^2$ の値は、

$(2ab\sqrt{ab} - 1)^2 - 2a^3b^3 + 1$

$= 2a^3b^3 - 4ab\sqrt{ab} + 2$

$= \underline{2(ab\sqrt{ab} - 1)^2}$ //