______ 年　番号______　氏名______________________________

1 n を 1 以上の整数とする．

(1) n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数 d_n を求めよ．

(2) $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ．

（東京大学　2019）

2 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

（東京大学　2019）

3 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1=2,\quad a_{n+1}={a_n}^3 4^n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $b_n=\log_2 a_n$ とするとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(2) α，β を定数とし $f(n)=\alpha n+\beta$ とする．このとき，$b_{n+1}-f(n+1)=3\{b_n-f(n)\}$ が成り立つように α，β を定めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

（静岡大学　2019）

4 x は $0<x<1$ を満たす実数とする．三辺の長さが 1，1，$2x$ の二等辺三角形の内接円の半径を r，外接円の半径を R とする．以下の問いに答えよ．

(1) r と R を x を用いて表せ．

(2) $\dfrac{r}{R}$ を最大にする x とそのときの $\dfrac{r}{R}$ の値を求めよ．

（岡山大学　2019）

5 a，b を正の数とする．数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=a,\quad x_2=b,$$
$$x_{n+2}=\frac{1+x_{n+1}}{x_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1) x_6，x_7 を a，b を用いて表せ．

(2) $a=2$ とする．x_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ がすべて自然数になるような b の値をすべて求めよ．

（岡山大学　2019）

6 $0<x<1$ において，$1-x^2$，$\sqrt{1-x^2}$，$\cos x$ の値の大小を比較せよ．

（香川大学　2019）

7 平行四辺形 ABCD について，$\mathrm{AB}=t$，$\mathrm{AD}=6$，$\angle\mathrm{BAD}=60^\circ$ とする．直線 AB 上に点 E を，$\angle\mathrm{AED}=90^\circ$ となるようにとり，また線分 AC 上に点 F を，$\angle\mathrm{ADF}=90^\circ$ となるようにとる．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とおくとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ．

(2) $\triangle\mathrm{DEF}$ が直角三角形となるような t の値を求めよ．

（香川大学　2019）

8 一辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 OB を 1 : 3 に内分する点を E，辺 OC を 1 : 3 に内分する点を F とする．$\triangle\mathrm{DEF}$ の重心を G とし，直線 OG と $\triangle\mathrm{ABC}$ の交点を H とする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(2) 線分 AH の長さを求めよ．

（岡山大学　2019）

$\boxed{9}$ aを実数とする．座標平面上の放物線

$$C : y = 2x^2 + 4x + 3$$

と直線

$$L : y = -2ax - a^2$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) CとLが異なる2点で交わるようなaの値の範囲を求めよ．

(2) aの値が(1)の範囲にあるとする．CとLで囲まれる図形の面積Sを最大にするaとそのときのSの値を求めよ．

（岡山大学　2019）

$\boxed{10}$ AとBの二人がじゃんけんをする．1回ごとに，勝った方は2点，負けた方は0点，あいこの場合はどちらも1点ずつを得るものとする．n回目のじゃんけんを終えた時点でのAの得点の合計をa_n，Bの得点の合計をb_nとする．以下の問いに答えよ．

(1) $a_3 = 3$となる確率を求めよ．

(2) $a_5 = 5$となる確率を求めよ．

(3) $a_5 \geqq b_5$となる確率を求めよ．

（岡山大学　2019）

$\boxed{11}$ a，bを正の数とする．数列$\{x_n\}$を

$$x_1 = a, \quad x_2 = b,$$
$$x_{n+2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1) x_6，x_7をa，bを用いて表せ．

(2) x_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$がすべて自然数になるようなa，bの組をすべて求めよ．

（岡山大学　2019）

$\boxed{12}$ 次の3つの等式

$$z\overline{w} = \overline{z}w, \quad |z-1| = 1, \quad |z-w| = 2$$

を満たす複素数z，wについて，以下の問いに答えよ．ただし$z \fallingdotseq 0$とし，zの偏角をθと表す．

(1) 複素数平面において3点0，z，wは一直線上にあることを示せ．

(2) zとwをθを用いて表せ．

(3) θは$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとする．このとき$w$のとりうる値について，その虚部の最大の値を求めよ．

（岡山大学　2019）

$\boxed{13}$ pを自然数とする．数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在することを示せ．

（一橋大学　2019）

$\boxed{14}$ 原点をOとする座標平面上の点Qは円$x^2 + y^2 = 1$上の$x \geqq 0$かつ$y \geqq 0$の部分を動く．点Qと点A(2，2)に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

を満たす点Pの軌跡を求め，図示せよ．

（一橋大学　2019）

$\boxed{15}$ 次の問いに答えよ．

(1) 座標平面上で，不等式$|y| \geqq |x| + x + 1$の表す領域を図示せよ．

(2) aを定数とし，$f(x) = |x-2| + (a+1)x - 2$とする．関数$y = f(x)$のグラフが$x$軸とちょうど2点で交わるとする．そのとき，$a$の値の範囲を求め，不等式$f(x) \leqq y \leqq 0$の表す領域の面積を$a$で表せ．

（新潟大学　2019）