

1 平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を C とする. 円 C の内部に点 A がある. 円 C の周上に 2 点 P, Q が条件 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$ を満たしながら動く. 線分 PQ の中点を R とする. また, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $|\vec{a}| = r$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$ とする. ただし, $0 < r < 1$ とする.

(1) $|\overrightarrow{AR}|^2$ を内積 $\vec{p} \cdot \vec{q}$ を用いて表せ.

(2) 直線 OA 上の点 B で, $|\overrightarrow{BR}|^2$ が 2 点 P, Q の位置によらず一定であるものを求めよ. また, このときの $|\overrightarrow{BR}|^2$ の値を r を用いて表せ.

(北海道大学 2017)

2 正四面体 $ABCD$ の頂点を移動する点 P がある. 点 P は, 1 秒ごとに, 隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\frac{a}{3}$ で移るか, もとの頂点に確率 $1 - a$ で留まる. 初め頂点 A にいた点 P が, n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする. ただし, $0 < a < 1$ とし, n は自然数とする.

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ.

(2) 確率 p_n を求めよ.

(北海道大学 2017)

3 a, b を実数とし, 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + \int_{-1}^1 f(t) dt$$

を満たすとする.

(1) $f(0)$ の値を a を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ が $x > 1$ の範囲で極大値を持つとする. このような a, b が満たす条件を求めよ. また, 点 $P(a, b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ.

(北海道大学 2017)

4 自然数の2乗となる数を平方数という.

(1) 自然数 a, n, k に対して, $n(n+1) + a = (n+k)^2$ が成り立つとき,

$$a \geq k^2 + 2k - 1$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n(n+1) + 14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ.

(北海道大学 2017)

5 関数 $f(x) = 1 + \sin x - x \cos x$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の $0 \leq x \leq 2\pi$ における増減を調べ, 最大値と最小値を求めよ.

(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(3) 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

(北海道大学 2017)

6 複素数平面上に3点 O, A, B を頂点とする $\triangle OAB$ がある. ただし, O は原点とする. $\triangle OAB$ の外心を P とする. 3点 A, B, P が表す複素数を, それぞれ α, β, z とするとき,

$$\alpha\beta = z$$

が成り立つとする.

(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め, 点 $A(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ.

(2) 点 $P(z)$ の存在範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ.

(北海道大学 2017)

7 さいころを続けて投げて、数直線上の点 P を移動させるゲームを行う。初め点 P は原点 0 にいる。さいころを投げるたびに、出た目の数だけ、点 P を現在の位置から正の向きに移動させる。この試行を続けて行い、点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する。 n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする。

(1) $p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ。

(2) p_9 の値を求めよ。

(3) p_3 の値を求めよ。

(北海道大学 2017)

8 座標平面上の 3 点 $A(1, 0)$, $B(3, 1)$, $C(2, 2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の内部および境界を T とおく。実数 a に対して、条件

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 \leq a$$

を満たす座標平面上の点 P の全体を D とする。ただし、 AP は点 A と点 P の距離を表す。

(1) D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ。

(2) D が T を含むような a の値の範囲を求めよ。

(3) (1) のもとで、 D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ。

(北海道大学 2017)

9 複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円 C 上に点 z がある。 a を実数の定数とし、

$$w = z^2 - 2az + 1$$

とおく。

(1) $|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ。

(2) 点 z が C 上を一周するとき、 $|w|$ の最小値を a を用いて表せ。

(北海道大学 2016)

10 $a > 0$ に対し, 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \int_{-a}^a \left\{ \frac{e^{-x}}{2a} + f(t) \sin t \right\} dt$$

をみたすとする.

(1) $f(x)$ を求めよ.

(2) $0 < a \leq 2\pi$ において,

$$g(a) = \int_{-a}^a f(t) \sin t dt$$

の最小値とそのときの a の値を求めよ.

(北海道大学 2016)

2016年理系第1問

 数理
石井

1 複素数平面上の点0を中心とする半径2の円C上に点zがある。aを実数の定数とし、

$$w = z^2 - 2az + 1$$

とおく。

- (1) $|w|^2$ をzの実部xとaを用いて表せ。
 (2) 点zがC上を一周するとき、 $|w|$ の最小値をaを用いて表せ。

$$(1) |w|^2 = w \cdot \bar{w}$$

$$\begin{aligned} &= (z^2 - 2az + 1)(\bar{z}^2 - 2a\bar{z} + 1) \\ &= z^2\bar{z}^2 - 2az^2\bar{z} + z^2 - 2a\bar{z}\bar{z}^2 + 4a^2z\bar{z} - 2az + \bar{z}^2 - 2a\bar{z} + 1 \\ &= |z|^4 - 2az|z|^2 + z^2 - 2a\bar{z}|z|^2 + 4a^2|z|^2 - 2az + \bar{z}^2 - 2a\bar{z} + 1 \end{aligned}$$

 $|z| = 2$ であるから、

$$|w|^2 = 16 - 10a(z + \bar{z}) + 16a^2 + z^2 + \bar{z}^2 + 1$$

 ここで、 $z + \bar{z} = 2x$ 、 $z^2 + \bar{z}^2 = (z + \bar{z})^2 - 2|z|^2 = 4x^2 - 8$ より、

$$\begin{aligned} |w|^2 &= 17 - 10a \cdot 2x + 16a^2 + 4x^2 - 8 \\ &= \underline{4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9} \end{aligned}$$

$$(2) |w|^2 = 4\left(x - \frac{5}{2}a\right)^2 - 9a^2 + 9$$

 $-2 \leq x \leq 2$ であるから

$$(i) -2 \leq \frac{5}{2}a \leq 2 \text{ すなわち、} -\frac{4}{5} \leq a \leq \frac{4}{5} \text{ のとき}$$

$$|w| \text{の最小値は、} \sqrt{-9a^2 + 9} = 3\sqrt{1 - a^2}$$

$$(ii) \frac{5}{2}a > 2 \text{ すなわち、} a > \frac{4}{5} \text{ のとき。}$$

$$|w| \text{は} x = 2 \text{のとき、最小値} \sqrt{(4a - 5)^2} = |4a - 5| \text{をとる。}$$

$$(iii) \frac{5}{2}a < -2 \text{ すなわち、} a < -\frac{4}{5} \text{ のとき。}$$

$$|w| \text{は} x = -2 \text{のとき、最小値} \sqrt{(4a + 5)^2} = |4a + 5| \text{をとる}$$

(i)~(iii)より、 $|w|$ の最小値は

$$\begin{cases} |4a + 5| & (a < -\frac{4}{5} \text{のとき}) \\ 3\sqrt{1 - a^2} & (-\frac{4}{5} \leq a \leq \frac{4}{5} \text{のとき}) \\ |4a - 5| & (a > \frac{4}{5} \text{のとき}) \end{cases} \quad \text{—} //$$