______年　番号______　氏名______________________________

$\boxed{1}$ 正の整数 m，n に対して $f(m,\ n)$ が次の等式を満たすように定められている．

$$\begin{cases} f(1,\ 1)=1, \quad f(2,\ 2)=6, \quad f(3,\ 3)=20 \\ f(m,\ n)=2f(m-1,\ n) \quad (m \geqq 2) \\ f(m,\ n)+3f(m,\ n-2)=3f(m,\ n-1)+f(m,\ n-3) \quad (n \geqq 4) \end{cases}$$

次の問に答えよ．

(1) $f(m,\ 1)$ および $f(1,\ n)$ をそれぞれ m，n の式で表せ．

(2) $f(6,\ 32)$ の値を求めよ．

(3) 任意の正の整数 l に対して，$f(m,\ n)=l$ を満たす正の整数 m，n が存在することを示せ．

（早稲田大学　2016）

$\boxed{2}$ a，b を実数とし，自然数 k に対して $x_k=\dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $x_k=\dfrac{p}{k}+\dfrac{q}{k+1}+\dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p，q，r を，a，b を用いて表せ．

(2) $b=0$ のとき，3 以上の自然数 n に対して $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

また，$a=0$ のとき，4 以上の自然数 n に対して $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ の和を求めよ．

（神戸大学　2015）

$\boxed{3}$ 座標平面上の曲線 $y=x^2(1-x)$ を C とし，直線 $y=-x$ を ℓ とする．数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように定める．$a_1=\dfrac{2}{5}$ とし，$x=a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ における C の接線と ℓ の交点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき次の問に答えよ．

(1) n を自然数とするとき，a_{n+1} を a_n で表せ．

(2) n を自然数とするとき，$0<a_{n+1}<a_n{}^2$ を示せ．

（東京海洋大学　2015）

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ．

(1) n 個の実数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n に対して

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2$$

が成立することを示せ．また，等号が成立するための a_1，a_2，$\cdots$，a_n についての必要十分条件を求めよ．

(2) 偏りをもつサイコロを 2 回投げるとき，同じ目が続けて出る確率は $\dfrac{1}{6}$ よりも大きいことを示せ．ただし，サイコロが偏りをもつとは，1 から 6 の目が同様に確からしく出ないことをいう．

（信州大学　2015）

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ．

(1) n 個の実数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n に対して

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2$$

が成立することを示せ．また，等号が成立するための a_1，a_2，$\cdots$，a_n についての必要十分条件を求めよ．

(2) 偏りをもつサイコロを 2 回投げるとき，同じ目が続けて出る確率は $\dfrac{1}{6}$ よりも大きいことを示せ．ただし，サイコロが偏りをもつとは，1 から 6 の目が同様に確からしく出ないことをいう．

（信州大学　2015）

0002178091287999

2016年 基幹理工・創造理工・先進理工 第1問　1枚目／2枚

数理 石井K

1 正の整数 m, n に対して $f(m, n)$ が次の等式を満たすように定められている.

$$\begin{cases} f(1, 1)=1, \quad f(2, 2)=6, \quad f(3, 3)=20 \\ f(m, n)=2f(m-1, n) \quad (m \geqq 2) \quad \cdots ① \\ f(m, n)+3f(m, n-2)=3f(m, n-1)+f(m, n-3) \quad (n \geqq 4) \quad \cdots ② \end{cases}$$

次の問に答えよ.

(1) $f(m, 1)$ および $f(1, n)$ をそれぞれ m, n の式で表せ.

(2) $f(6, 32)$ の値を求めよ.

(3) 任意の正の整数 l に対して, $f(m, n)=l$ を満たす正の整数 m, n が存在することを示せ.

(1) ①に $n=1$ を代入して.

$$f(m,1)=2f(m-1,1) \quad (m \geqq 2)$$

よって. m についての数列 $\{f(m,1)\}$ は 初項 $f(1,1)=1$, 公比 2 の等比数列であるから,

$$f(m,1)=2^{m-1}$$ //

同様に, ②に $m=1$ を代入して.

$$f(1,n)+3f(1,n-2)=3f(1,n-1)+f(1,n-3) \quad (n \geqq 4)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(1,n)-2f(1,n-1)+f(1,n-2) &= f(1,n-1)-2f(1,n-2)+f(1,n-3) \\ &= f(1,n-2)-2f(1,n-3)+f(1,n-4) \\ &= \quad \vdots \\ &= f(1,3)-2f(1,2)+f(1,1) \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

くり返し用いる.

ここで, ①に $m=2$, $n=2$ を代入すると,

$f(2,2)=2f(1,2)$ 　よって $f(2,2)=6$ より, $f(1,2)=3$

①に $m=2$, $n=3$ を代入すると,

$$f(2,3)=2f(1,3)$$

また, ①に $m=3$, $n=3$ を代入すると,

$f(3,3)=2f(2,3)$ 　よって $f(3,3)=20$ より, $f(2,3)=10$ 　$\therefore f(1,3)=5$

③にこれらを代入して. $f(1,n)-2f(1,n-1)+f(1,n-2)=0$

$$\begin{aligned} \therefore f(1,n)-f(1,n-1) &= f(1,n-1)-f(1,n-2) \\ &\vdots \\ &= f(1,2)-f(1,1) \end{aligned}$$

早稲田大学

2016年 基幹理工・創造理工・先進理工 第1問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 正の整数 $m,\ n$ に対して $f(m,\ n)$ が次の等式を満たすように定められている．

$$\begin{cases} f(1,\ 1)=1, \quad f(2,\ 2)=6, \quad f(3,\ 3)=20 \\ f(m,\ n)=2f(m-1,\ n) \quad (m \geqq 2) \\ f(m,\ n)+3f(m,\ n-2)=3f(m,\ n-1)+f(m,\ n-3) \quad (n \geqq 4) \end{cases}$$

次の問に答えよ．

(1) $f(m,\ 1)$ および $f(1,\ n)$ をそれぞれ $m,\ n$ の式で表せ．

(2) $f(6,\ 32)$ の値を求めよ．

(3) 任意の正の整数 l に対して，$f(m,\ n)=l$ を満たす正の整数 $m,\ n$ が存在することを示せ．

(1) のつづき.

$\therefore\ f(1,n)-f(1,n-1)=2$

$\therefore$ 数列 $\{f(1,n)\}$ は 初項 1，公差 2 の等差数列

$\therefore\ \underline{f(1,n)=2n-1}$ //

(2) ① に $m=6$，$n=32$ を代入して，くり返すと.

$f(6,32)=2f(5,32)=2^2f(4,32)=\cdots=2^5f(1,32) \overset{(1)より}{=} 32\cdot 63=\underline{2016}$ //

(3) (2) と同様にして.

$f(m,n)=2f(m-1,n)=2^2f(m-2,n)=\cdots=2^{m-1}f(1,n) \overset{(1)より}{=} 2^{m-1}\cdot(2n-1)$

任意の正の整数 l は

$l=2^{p_1}\cdot 3^{p_2}\cdot 5^{p_3}\cdots\cdots$ と素因数分解できる（p_i はすべて 0 以上の整数）

よって，$m=p_1+1$（正の整数），$n=\frac{1}{2}(\underbrace{1+3^{p_2}\cdot 5^{p_3}\cdots\cdots}_{偶数})$（正の整数）

ととれば，よい

よって．任意の正の整数 l に対して．$f(m,n)=l$ をみたす 正の整数 m,n は存在する ▨

神戸大学

2015 年 第 4 問　1枚目／2枚

数理 石井K

4 a, b を実数とし，自然数 k に対して $x_k = \dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $x_k = \dfrac{p}{k} + \dfrac{q}{k+1} + \dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p, q, r を，a, b を用いて表せ．

(2) $b=0$ のとき，3 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

また，$a=0$ のとき，4 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の和を求めよ．

(1) $x_k = \dfrac{p}{k} + \dfrac{q}{k+1} + \dfrac{r}{k+3}$ と表せたとき.

$$x_k = \frac{p(k+1)(k+3)+qk(k+3)+rk(k+1)}{k(k+1)(k+3)}$$

$$= \frac{(p+q+r)k^2+(4p+3q+r)k+3p}{k(k+1)(k+3)}$$

∴ 係数を比較して.

$$\begin{cases} p+q+r=0 \\ 4p+3q+r=2a \\ 3p=6b \end{cases} \iff \begin{cases} q+r=-2b \\ 3q+r=2a-8b \\ p=2b \end{cases} \iff \underline{p=2b,\ q=a-3b,\ r=-a+b} \ //$$

(2) $b=0$ のとき (1) より. $x_k = \dfrac{a}{k+1} - \dfrac{a}{k+3}$ $(\because p=0, q=a, r=-a)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} x_k = a\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right)$$

$$= a\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+3}\right) \quad (n \geqq 3)$$

$$= a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

$$= \underline{\frac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}} \ //$$

$a=0$ のとき. (1) より. $x_k = \dfrac{2b}{k} - \dfrac{3b}{k+1} + \dfrac{b}{k+3}$ $(\because p=2b, q=-3b, r=b)$

$$\therefore x_k = 2b\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - b\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right)$$

2015年 第4問　2枚目／2枚

数理 石井K

4 a，b を実数とし，自然数 k に対して $x_k = \dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $x_k = \dfrac{p}{k} + \dfrac{q}{k+1} + \dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p，q，r を，a，b を用いて表せ．

(2) $b=0$ のとき，3 以上の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

また，$a=0$ のとき，4 以上の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の和を求めよ．

(2) のつづき．

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} x_k = 2b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) - b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$= 2b\left(1-\frac{1}{n+1}\right) - b\cdot\frac{n(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}$$

b=0のときの計算より.

$$= b\cdot\frac{2n\cdot 6(n+2)(n+3)-n(n+1)(5n+13)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \underline{\frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}}$$ //

(3) $$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2ak}{k(k+1)(k+3)}}_{b=0\text{のときの和}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6b}{k(k+1)(k+3)}}_{a=0\text{のときの和}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)} + \lim_{n\to\infty}\frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{5}{6}a + \frac{7}{6}b$$

$$= \underline{\frac{1}{6}(5a+7b)}$$ //

2015年 海洋科学 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

4 座標平面上の曲線 $y = x^2(1-x)$ を C とし，直線 $y = -x$ を ℓ とする．数列 $\{a_n\}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように定める．$a_1 = \dfrac{2}{5}$ とし，$x = a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ における C の接線と ℓ の交点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき次の問に答えよ．

(1) n を自然数とするとき，a_{n+1} を a_n で表せ．

(2) n を自然数とするとき，$0 < a_{n+1} < a_n{}^2$ を示せ．

(1) $y' = 2x - 3x^2$

∴ $x = a_n$ における C の接線は，

$y = (2a_n - 3a_n^2)(x - a_n) + a_n^2(1 - a_n)$

$= (2a_n - 3a_n^2)x - a_n^2 + 2a_n^3$

∴ $-a_{n+1} = (2a_n - 3a_n^2)a_{n+1} - a_n^2 + 2a_n^3$

∴ $(3a_n^2 - 2a_n - 1)a_{n+1} = a_n^2(2a_n - 1)$

∴ $(3a_n + 1)(a_n - 1)a_{n+1} = a_n^2(2a_n - 1)$ …①

$a_n = -\frac{1}{3}$ と仮定すると，①の(左辺)$= 0$，(右辺)$\neq 0$　∴矛盾　∴ $3a_n + 1 \neq 0$

同様にして，$a_n - 1 \neq 0$

∴①の両辺を $(3a_n+1)(a_n-1)$ $(\neq 0)$ で割って，$\underline{a_{n+1} = \dfrac{a_n^2(2a_n - 1)}{(3a_n+1)(a_n-1)}}$ //

(2) (1)より，$a_{n+1} = \dfrac{a_n^2(1 - 2a_n)}{(3a_n+1)(1-a_n)}$

まず，$0 < a_n < \frac{1}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を数学的帰納法で示す　← この方針を作るのが難しい！

(i) $n = 1$ のとき，

$a_1 = \frac{2}{5}$ より，$0 < a_1 < \frac{1}{2}$　∴成り立つ

(ii) $n = k$ のとき成り立つと仮定すると，

$0 < a_k < \frac{1}{2}$

よって，$0 < a_k{}^2 < \frac{1}{4}$，$0 < 1 - 2a_k < 1$，$1 < 3a_k + 1 < \frac{5}{2}$，$\frac{1}{2} < 1 - a_k < 1$

以上より，$\dfrac{0 \cdot 0}{\frac{5}{2} \cdot 1} < a_{k+1} < \dfrac{\frac{1}{4} \cdot 1}{1 \cdot \frac{1}{2}}$　　∴ $0 < a_{k+1} < \frac{1}{2}$

∴ $n = k+1$ のときも成り立つ

(i), (ii)より，$0 < a_n < \frac{1}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つ

2枚目へつづく

2015年 海洋科学 第4問　2枚目／2枚

数理 石井K

4 座標平面上の曲線 $y = x^2(1-x)$ を C とし，直線 $y = -x$ を ℓ とする．数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次のように定める．$a_1 = \dfrac{2}{5}$ とし，$x = a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ における C の接線と ℓ の交点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき次の問に答えよ．

(1) n を自然数とするとき，a_{n+1} を a_n で表せ．

(2) n を自然数とするとき，$0 < a_{n+1} < a_n{}^2$ を示せ．

(2)のつづき

あとは，$a_n^2 - a_{n+1} > 0$ を示せばよい

$$a_n^2 - a_{n+1} = a_n^2 - \frac{a_n^2(1-2a_n)}{(3a_n+1)(1-a_n)}$$

$$= \frac{a_n^3(4-3a_n)}{(3a_n+1)(1-a_n)}$$

ここで，$0 < a_n < \frac{1}{2}$ より，$a_n^3 > 0$，$4-3a_n > 0$，$3a_n+1 > 0$，$1-a_n > 0$

$\therefore\ a_n^2 - a_{n+1} > 0$

以上より，$0 < a_{n+1} < a_n^2$ ▨

信州大学

2015 年 経済学部 第 4 問

4 次の問いに答えよ．

(1) n 個の実数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n に対して

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$$

が成立することを示せ．また，等号が成立するための a_1，a_2，$\cdots$，a_n についての必要十分条件を求めよ．

(2) 偏りをもつサイコロを 2 回投げるとき，同じ目が続けて出る確率は $\dfrac{1}{6}$ よりも大きいことを示せ．ただし，サイコロが偏りをもつとは，1 から 6 の目が同様に確からしく出ないことをいう．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = l$ とおき．各 k $(k=1,2,\cdots,n)$ に対して．

$a_k = \dfrac{l}{n} + e_k$ とおく．ここで e_k は定数である．

このとき．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = l$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k = 0 \cdots ①$ が成り立つ

$$n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{l}{n}+e_k\right)^2$$

$$= n\left(\frac{l^2}{n} + \frac{l}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k + \sum_{k=1}^{n} {e_k}^2\right)$$

$$= l^2 + n\sum_{k=1}^{n} {e_k}^2 \qquad (\because ①より)$$

$$\geqq l^2$$

すなわち，$\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$ が成り立つ．

等号成立 は．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {e_k}^2 = 0 \iff e_1 = e_2 = \cdots = e_n = 0$

$\iff a_1 = a_2 = \cdots = a_n =$ ■

(2) さいころの k の目が出る確率を a_k で表す．$(k=1,2,\cdots,6)$

このとき．$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} a_k = 1$ となるから (1) の不等式を使うと．

$1^2 \leqq 6\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^{6} {a_k}^2$ よって．$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} {a_k}^2 \geqq \frac{1}{6}$ このサイコロは偏りをもつので (1) の等号成立条件をみたさない

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{6} {a_k}^2 > \frac{1}{6}$

これは，同じ目が続けて出る確率が $\dfrac{1}{6}$ より大きいことを表している ■

信州大学

2015年 経済学部 第4問

4 次の問いに答えよ．

(1) n 個の実数 a_1，a_2，…，a_n に対して

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$$

が成立することを示せ．また，等号が成立するための a_1，a_2，…，a_n についての必要十分条件を求めよ．

(2) 偏りをもつサイコロを2回投げるとき，同じ目が続けて出る確率は $\dfrac{1}{6}$ よりも大きいことを示せ．ただし，サイコロが偏りをもつとは，1から6の目が同様に確からしく出ないことをいう．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = l$ とおき．各 k $(k=1, 2, \cdots, n)$ に対して．

$a_k = \dfrac{l}{n} + e_k$ とおく．ここで e_k は定数である．

このとき．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = l$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k = 0$ …① が成り立つ

$$\begin{aligned} n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 &= n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{l}{n}+e_k\right)^2 \\ &= n\left(\frac{l^2}{n} + \frac{l}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k + \sum_{k=1}^{n} {e_k}^2\right) \\ &= l^2 + n\sum_{k=1}^{n} {e_k}^2 \qquad (\because ①より) \\ &\geqq l^2 \end{aligned}$$

すなわち，$\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$ が成り立つ．

等号成立は．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {e_k}^2 = 0 \iff e_1 = e_2 = \cdots = e_n = 0$

$\iff a_1 = a_2 = \cdots = a_n =$ ■

(2) さいころの k の目が出る確率を a_k で表す．$(k=1, 2, \cdots, 6)$

このとき．$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} a_k = 1$ となるから (1) の不等式を使うと．

$1^2 \leqq 6\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^{6} {a_k}^2$　よって．$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} {a_k}^2 \geqq \frac{1}{6}$　このサイコロは偏りをもつので(1)の等号成立条件をみたさない

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{6} {a_k}^2 > \frac{1}{6}$

これは．同じ目が続けて出る確率が $\dfrac{1}{6}$ より大きいことを表している ■