

1 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を連続関数とするとき,

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

が成り立つことを示せ.

(2) 定積分

$$\int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$$

の値を求めよ.

(横浜国立大学 2010)

2 1個のいびつなさいころがある. 1, 2, 3, 4の目が出る確率はそれぞれ $\frac{p}{2}$ であり, 5, 6の目が出る確率はそれぞれ $\frac{1-2p}{2}$ である. ただし, $0 < p < \frac{1}{2}$ とする. このさいころを投げて, xy 平面上の点 Q を次のように動かす.

- (i) 1 または 2 の目が出たときには, Q を x 軸の正の方向に 1 だけ動かす.
- (ii) 3 または 4 の目が出たときには, Q を y 軸の正の方向に 1 だけ動かす.
- (iii) 5 または 6 の目が出たときには, Q を動かさない.

Q は最初原点 $(0, 0)$ にある. このさいころを $(n+1)$ 回投げ, Q が通った点 (原点および Q の最終位置の点を含む) の集合を S とする. ただし, n は自然数とする. 次の問いに答えよ.

- (1) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき, S が点 $(1, n-1)$ を含む確率を求めよ.
- (2) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき, S が領域 $x+y < n$ に含まれる確率を求めよ.
- (3) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき, S が点 $(k, n-k)$ を含むならば得点 2^k 点 ($k=0, 1, \dots, n$) が与えられ, S が領域 $x+y < n$ に含まれるならば得点 0 点を与えられるとする. 得点の期待値を求めよ.

(横浜国立大学 2010)

3 次の問いに答えよ.

(1) $0 < x < \pi$ のとき,

$$\sin x - x \cos x > 0$$

を示せ.

(2) 定積分

$$I = \int_0^\pi |\sin x - ax| dx \quad (0 < a < 1)$$

を最小にする a の値を求めよ.

(横浜国立大学 2010)

4 a, b を正の実数とする. 曲線

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$$

は領域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ に含まれている. 次の問いに答えよ.

(1) (a, b) が存在する範囲を ab 平面上に図示せよ.

(2) C が囲む部分の面積が最大になるときの a, b の値を求めよ.

(横浜国立大学 2010)

5 各項が正の実数である数列 $\{a_n\}$ が, $a_1 = 1$ と関係式

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{a_n + a_{n+1}} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたしている. 次の問いに答えよ.

(1) $a_n \geq \sqrt{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ.

(2) $\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} \leq \frac{2}{3}(n^{\frac{3}{2}} - 1)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) を示せ.

(3) $a_n \leq \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{6}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ.

(横浜国立大学 2010)

6 次の問いに答えよ.

(1) 定積分

$$\int_1^e x^{\frac{1}{n}} \log x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を求めよ.

(2) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_1^e x^{\frac{1}{n}} \log x dx - 1 \right)$$

を求めよ.

(横浜国立大学 2009)

7 xy 平面上に曲線 $C: y = x^2$ がある. C 上の点 $P(t, t^2)$ を次の条件 (*) をみたすようにとる.

(*) P 以外の C 上の異なる 2 点 Q, R があり, そこの C の法線がともに P を通る.

$Q(\alpha, \alpha^2), R(\beta, \beta^2) (\alpha < \beta)$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) t をとり得る値の範囲を求めよ.

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき, 線分 QR の中点 M が描く軌跡の方程式を求めよ.

(3) β を t の式で表し, 極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} t\beta$ を求めよ.

(横浜国立大学 2009)

8 赤, 青, 黄の 3 色を用いて, 横一列に並んだ n 個のマス, 隣り合うマスは異なる色になるように塗り分ける. ただし, 使わない色があってもよい. 両端のマスが同じ色になる場合の数を a_n とし, 両端のマスが異なる色になる場合の数を b_n とする. 次の問いに答えよ.

(1) a_3, b_3, a_4, b_4 を求めよ.

(2) $a_n, b_n (n \geq 3)$ を n の式で表せ.

(横浜国立大学 2009)

9 xy 平面上に円 $C: x^2 + y^2 = 1$ がある. C の外部の点 $P(s, t) (s \neq \pm 1)$ から C へ引いた 2 つの接線と直線 $x = 1$ との交点を Q, R とする. 次の問いに答えよ.

(1) 線分 QR の長さを s, t を用いて表せ.

(2) QR の長さが 1 であるように P が動くとき, P の軌跡を求め, 図示せよ.

(横浜国立大学 2009)

10 平面上に3点O, A, Bがあり, $OA = a$, $OB = b$ ($0 < a < b$)で, \vec{OA} と \vec{OB} のなす角 θ は $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ をみたす. 点Cを $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ で定める. また, Oから引いた半直線OA上に, 点Pを $OA < OP$ となるようにとる. 直線PCと直線OBの交点をQとする. $AP = x$, $PQ^2 = f(x)$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ を x と a, b, θ を用いて表せ.
- (2) 第2次導関数 $f''(x)$ は, $x > 0$ のとき $f''(x) > 0$ をみたすことを示せ.
- (3) $a = 1, b = \sqrt{6}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$ のとき, PQの長さの最小値を求めよ.

(横浜国立大学 2009)

11 次の問いに答えよ.

- (1) 不定積分

$$\int \sqrt{1 - e^{-2x}} dx$$

を置換 $\sqrt{1 - e^{-2x}} = t$ を用いて求めよ.

- (2) 極限

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a (1 - \sqrt{1 - e^{-2x}}) dx$$

を求めよ.

(横浜国立大学 2008)

12 xy 平面上に3つの曲線

$$C_1 : y = x^2$$

$$C_2 : y = 2(x - 1)^2 + 3$$

$$C_3 : y = -(x - a)^2 + b \quad (a, b \text{は実数})$$

がある. C_2 と C_3 はただ1つの点を共有している. 次の問いに答えよ.

- (1) C_1, C_2 は共有点をもたないことを示せ.
- (2) b を a の式で表せ.
- (3) C_1 と C_3 で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする. $S(a)$ を最小にする a を求めよ.

(横浜国立大学 2008)

13 原点を O とする xy 平面上に、2 直線

$$l_1 : y = mx$$

$$l_2 : y = -mx$$

がある。ただし、 $m > 1$ とする。 l_1 上に点 $P(s, ms)$ 、 l_2 上に点 $Q(t, -mt)$ を $s \neq 0$ 、 $t \neq 0$ となるようにとる。P を通り l_1 に垂直な直線と、Q を通り l_2 に垂直な直線の交点を R とする。次の問いに答えよ。

(1) R の座標を求めよ。

(2) PQ と OR が平行となるように P、Q を動かすとき、R の軌跡を求めよ。

(横浜国立大学 2008)

14 連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

の表す図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

(横浜国立大学 2008)

15 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = 1 - a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) $0 < a_{2n-1} \leq \frac{1}{2}$ 、 $\frac{3}{4} \leq a_{2n} < 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることを示せ。

(2) x が $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき、関数 $f(x) = 2x - x^3$ のとる値の範囲を求めよ。

(3) $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} \leq \frac{7}{8}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることを示せ。

(横浜国立大学 2008)

2009年 第1問

 数理
石井K

1 次の問いに答えよ.

(1) 定積分

$$\int_1^e x^{\frac{1}{n}} \log x \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を求めよ.

(2) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_1^e x^{\frac{1}{n}} \log x \, dx - 1 \right)$$

を求めよ.

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ (等式)} &= \int_1^e \left(\frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}} \right)' \log x \, dx \\
 &= \left[\frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}} \cdot \log x \right]_1^e - \int_1^e \frac{n}{n+1} x^{\frac{1}{n}} \, dx \\
 &= \frac{n}{n+1} e^{\frac{n+1}{n}} - \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^2 x^{\frac{n+1}{n}} \right]_1^e \\
 &= \frac{n}{n+1} e^{\frac{n+1}{n}} - \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 e^{\frac{n+1}{n}} + \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \\
 &= \frac{n}{(n+1)^2} e^{\frac{n+1}{n}} + \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \quad \text{,,}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ (等式)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \frac{n e^{\frac{n+1}{n}} + n^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2} \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1+\frac{1}{n}} - 2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \\
 &= \frac{e-2}{\quad} \quad \text{,,}
 \end{aligned}$$

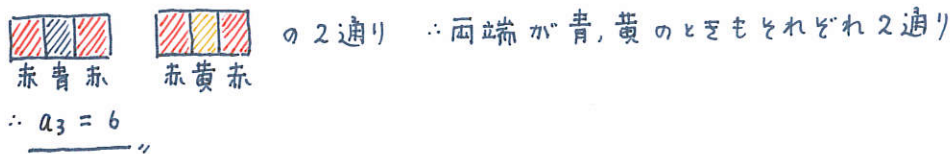
2009年第3問

3 赤, 青, 黄の3色を用いて, 横一列に並んだ n 個のマス, 隣り合うマスは異なる色になるように塗り分ける. ただし, 使わない色があってもよい. 両端のマスが同じ色になる場合の数を a_n とし, 両端のマスが異なる色になる場合の数を b_n とする. 次の問いに答えよ.

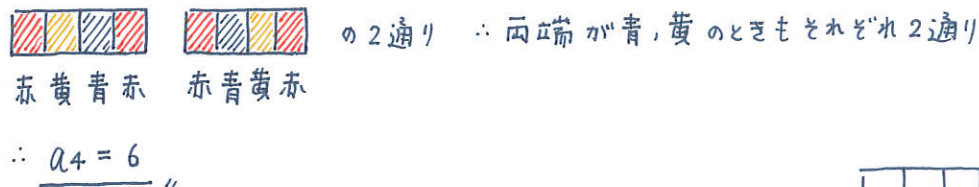
- (1) a_3, b_3, a_4, b_4 を求めよ.
 (2) $a_n, b_n (n \geq 3)$ を n の式で表せ.

(1) $n=3$ のとき.

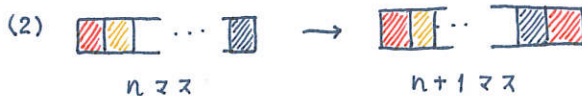
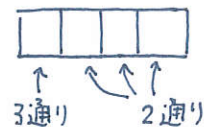
両端が赤色となるのは.

両端が異なるのは, 3色すべてを使うときなので, $b_3 = 3! = 6$ $n=4$ のとき.

両端が赤となるのは.



$$a_4 + b_4 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \quad \therefore b_4 = 24 - 6 = 18$$



両端が異なる n マスの色のつけ方から右に1マス目と同じ色のマスを追加することで $n+1$ マスで両端が同色の場合を作ることができ, からは 1:1 に対応する

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n & \dots \textcircled{1} \\ a_n + b_n = 3 \cdot 2^{n-1} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より. } a_{n+1} + a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \quad \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \text{数列} \left\{ \frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{2} \right\} \text{ は 第3項が } \frac{a_3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \text{ 公比 } -\frac{1}{2} \text{ の等比数列. } \therefore a_n = 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-1} \quad (n \geq 3)$$

$$\textcircled{1} \text{ より. } b_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n \quad (n \geq 3)$$