$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を連続関数とするとき,

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

が成り立つことを示せ.

(2) 定積分

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{\sin^2 x + 8}\,dx$$

の値を求めよ.

(横浜国立大学　2010)

$\boxed{2}$ 1個のいびつなさいころがある.1, 2, 3, 4の目が出る確率はそれぞれ $\dfrac{p}{2}$ であり,5, 6の目が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1-2p}{2}$ である.ただし,$0 < p < \dfrac{1}{2}$ とする.このさいころを投げて,xy 平面上の点Qを次のように動かす.

(i) 1または2の目が出たときには,Qを x 軸の正の方向に1だけ動かす.

(ii) 3または4の目が出たときには,Qを y 軸の正の方向に1だけ動かす.

(iii) 5または6の目が出たときには,Qを動かさない.

Qは最初原点 $(0,\ 0)$ にある.このさいころを $(n+1)$ 回投げ,Qが通った点(原点およびQの最終位置の点を含む)の集合を S とする.ただし,n は自然数とする.次の問いに答えよ.

(1) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき,S が点 $(1,\ n-1)$ を含む確率を求めよ.

(2) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき,S が領域 $x+y<n$ に含まれる確率を求めよ.

(3) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき,S が点 $(k,\ n-k)$ を含むならば得点 2^k 点 $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ が与えられ,S が領域 $x+y<n$ に含まれるならば得点0点が与えられるとする.得点の期待値を求めよ.

(横浜国立大学　2010)

3 次の問いに答えよ．

(1) $0<x<\pi$ のとき，

$$\sin x - x\cos x > 0$$

を示せ．

(2) 定積分

$$I=\int_0^{\pi} |\sin x - ax|\,dx \quad (0<a<1)$$

を最小にする a の値を求めよ．

（横浜国立大学　2010）

4 a，b を正の実数とする．曲線

$$C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$$

は領域 $D: x^2+y^2 \leqq 1$ に含まれている．次の問いに答えよ．

(1) $(a,\ b)$ が存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

(2) C が囲む部分の面積が最大になるときの a，b の値を求めよ．

（横浜国立大学　2010）

5 各項が正の実数である数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$ と関係式

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたしている．次の問いに答えよ．

(1) $a_n \geqq \sqrt{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ．

(2) $\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k} \leqq \frac{2}{3}(n^{\frac{3}{2}}-1)$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を示せ．

(3) $a_n \leqq \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}n-\frac{1}{6}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ．

（横浜国立大学　2010）

$\boxed{6}$ 次の問いに答えよ．

(1) 定積分

$$\int_1^e x^{\frac{1}{n}} \log x \, dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を求めよ．

(2) 極限

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\int_1^e x^{\frac{1}{n}} \log x \, dx - 1\right)$$

を求めよ．

（横浜国立大学　2009）

$\boxed{7}$ xy 平面上に曲線 $C : y = x^2$ がある．C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を次の条件 (*) をみたすようにとる．

(*) P 以外の C 上の異なる 2 点 Q，R があり，そこでの C の法線がともに P を通る．

$\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha < \beta)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) t をとり得る値の範囲を求めよ．

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき，線分 QR の中点 M が描く軌跡の方程式を求めよ．

(3) β を t の式で表し，極限 $\lim\limits_{t \to \infty} t\beta$ を求めよ．

（横浜国立大学　2009）

$\boxed{8}$ 赤，青，黄の 3 色を用いて，横一列に並んだ n 個のマスを，隣り合うマスは異なる色になるように塗り分ける．ただし，使わない色があってもよい．両端のマスが同じ色になる場合の数を a_n とし，両端のマスが異なる色になる場合の数を b_n とする．次の問いに答えよ．

(1) a_3，b_3，a_4，b_4 を求めよ．

(2) a_n，b_n $(n \geqq 3)$ を n の式で表せ．

（横浜国立大学　2009）

$\boxed{9}$ xy 平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 1$ がある．C の外部の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ $(s \neq \pm 1)$ から C へ引いた 2 つの接線と直線 $x = 1$ との交点を Q，R とする．次の問いに答えよ．

(1) 線分 QR の長さを s，t を用いて表せ．

(2) QR の長さが 1 であるように P が動くとき，P の軌跡を求め，図示せよ．

（横浜国立大学　2009）

$\boxed{10}$ 平面上に3点O，A，Bがあり，OA $= a$，OB $= b\,(0 < a < b)$で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$のなす角$\theta$は$0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$をみたす．点Cを$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$で定める．また，Oから引いた半直線OA上に，点PをOA $<$ OPとなるようにとる．直線PCと直線OBの交点をQとする．AP $= x$，PQ$^2 = f(x)$とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$をxとa，b，θを用いて表せ．

(2) 第2次導関数$f''(x)$は，$x > 0$のとき$f''(x) > 0$をみたすことを示せ．

(3) $a = 1$，$b = \sqrt{6}$，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$のとき，PQの長さの最小値を求めよ．

（横浜国立大学　2009）

$\boxed{11}$ 次の問いに答えよ．

(1) 不定積分

$$\int \sqrt{1 - e^{-2x}}\,dx$$

を置換$\sqrt{1 - e^{-2x}} = t$を用いて求めよ．

(2) 極限

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a \left(1 - \sqrt{1 - e^{-2x}}\right) dx$$

を求めよ．

（横浜国立大学　2008）

$\boxed{12}$ xy平面上に3つの曲線

$$C_1 : y = x^2$$
$$C_2 : y = 2(x-1)^2 + 3$$
$$C_3 : y = -(x-a)^2 + b \quad (a,\ b\text{は実数})$$

がある．C_2とC_3はただ1つの点を共有している．次の問いに答えよ．

(1) C_1，C_2は共有点をもたないことを示せ．

(2) bをaの式で表せ．

(3) C_1とC_3で囲まれる部分の面積を$S(a)$とする．$S(a)$を最小にするaを求めよ．

（横浜国立大学　2008）

$\boxed{13}$ 原点を O とする xy 平面上に，2 直線

$$\ell_1 : y = mx$$
$$\ell_2 : y = -mx$$

がある．ただし，$m > 1$ とする．ℓ_1 上に点 $\mathrm{P}(s,\ ms)$，ℓ_2 上に点 $\mathrm{Q}(t,\ -mt)$ を $s \neq 0$，$t \neq 0$ となるようにとる．P を通り ℓ_1 に垂直な直線と，Q を通り ℓ_2 に垂直な直線の交点を R とする．次の問いに答えよ．

(1) R の座標を求めよ．

(2) PQ と OR が平行となるように P，Q を動かすとき，R の軌跡を求めよ．

（横浜国立大学　2008）

$\boxed{14}$ 連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqq 1 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

の表す図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．

（横浜国立大学　2008）

$\boxed{15}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{2},\ \ a_{n+1} = 1 - {a_n}^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1) $0 < a_{2n-1} \leqq \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{4} \leqq a_{2n} < 1$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であることを示せ．

(2) x が $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，関数 $f(x) = 2x - x^3$ のとる値の範囲を求めよ．

(3) $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} \leqq \dfrac{7}{8}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であることを示せ．

（横浜国立大学　2008）

0000156183489999

横浜国立大学

2009年 第1問

数理 石井K

1 次の問いに答えよ.

(1) 定積分

$$\int_1^e x^{\frac{1}{n}} \log x \, dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を求めよ.

(2) 極限

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_1^e x^{\frac{1}{n}} \log x \, dx - 1\right)$$

を求めよ.

(1) (与式) $= \int_1^e \left(\frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}}\right)' \log x \, dx$

$= \left[\frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}} \cdot \log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{n}{n+1} x^{\frac{1}{n}} dx$

$= \frac{n}{n+1} e^{\frac{n+1}{n}} - \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 x^{\frac{n+1}{n}}\right]_1^e$

$= \frac{n}{n+1} e^{\frac{n+1}{n}} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 e^{\frac{n+1}{n}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$

$= \underline{\frac{n}{(n+1)^2} e^{\frac{n+1}{n}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2}$ //

(2) (与式) $= \lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{ne^{\frac{n+1}{n}} + n^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2}\right\}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1+\frac{1}{n}} - 2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}$

$= \underline{e - 2}$ //

0000168811389999

横浜国立大学

2009年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 赤，青，黄の3色を用いて，横一列に並んだ n 個のマスを，隣り合うマスは異なる色になるように塗り分ける．ただし，使わない色があってもよい．両端のマスが同じ色になる場合の数を a_n とし，両端のマスが異なる色になる場合の数を b_n とする．次の問いに答えよ．

(1) a_3，b_3，a_4，b_4 を求めよ．

(2) a_n，$b_n\ (n \geqq 3)$ を n の式で表せ．

(1) $n=3$ のとき.

両端が赤色となるのは.

赤青赤　赤黄赤

の2通り　∴両端が青，黄のときもそれぞれ2通り

∴ $\underline{a_3 = 6}$ //

両端が異なるのは. 3色すべてを使うときなので, $\underline{b_3 = 3! = 6}$ //

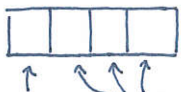
$n=4$ のとき.

両端が赤となるのは.

赤黄青赤　赤青黄赤

の2通り　∴両端が青，黄のときもそれぞれ2通り

∴ $\underline{a_4 = 6}$ //



$a_4 + b_4 = 3\cdot2\cdot2\cdot2 = 24$　　∴ $\underline{b_4 = 24 - 6 = 18}$ //

(2)

両端が異なる n マスの色のつけ方から右に1マス目と同じ色のマスを追加することで

$n+1$ マスで両端が同色の場合を作ることができ. これらは 1:1 に対応する

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1} = b_n & \cdots ① \\ a_n + b_n = 3\cdot 2^{n-1} & \cdots ② \end{cases}$$

①，②より.　$a_{n+1} + a_n = 3\cdot2^{n-1} \iff \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{3}{4}$

$$\iff \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{2}\right)$$

∴数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n} - \dfrac{1}{2}\right\}$ は第3項が $\dfrac{a_3}{8} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列.　∴ $\underline{a_n = 2^{n-1} + 2\cdot(-1)^{n-1}\ (n \geqq 3)}$ //

①より.

$\underline{b_n = 2^n + 2\cdot(-1)^n\ (n \geqq 3)}$ //