$\boxed{1}$ $P(x)$ は x^3 の係数が1の3次式である．$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが -3 である．また，$P(x)$ を $x-2$ で割ると割り切れ，その商を $Q(x)$ とする．$Q(x)$ を $x+3$ で割ると余りが7である．

(1) $Q(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) $Q(x)$ を求めよ．

(3) $P(x)$ を $(x-1)(x+3)$ で割ったときの商と余りを求めよ．

（徳島大学　2013）

$\boxed{2}$ 整数 a に対して $P(x)=x^3-ax^2+ax-1$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を求めよ．

(2) 3次方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ．

(3) 3次方程式 $P(x)=0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ．

（新潟大学　2015）

$\boxed{3}$ a を実数とする．整式 $f(x)$ を $2x^2+3x-2$ で割った余りは $6x+a$ であり，x^3-x+6 で割った余りは $5x^2-ax-8$ である．

(1) a を求めよ．

(2) $f(x)$ を x^2-2x+3 で割った余りを求めよ．

（学習院大学　2018）

$\boxed{4}$ 実数 x について，$A=x^4+4x^3+4x^2+5$，$B=x^2+2x+2$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) 整式 A を整式 B で割った商と余りを求めよ．

(2) A を B の2次式で表せ．

(3) (2) で求めた式を用いて，$\dfrac{A}{B}$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

（岩手大学　2017）

$\boxed{5}$ 1辺の長さが1の正方形OABCにおいて，ABを $p:(1-p)$ に内分する点をM，BCを $(1-q):q$ に内分する点をNとする．また，△OMNの面積を S とする．ただし，$0<p<1$，$0<q<1$ である．

(1) S を p，q を用いて表せ．

(2) $p=\dfrac{1-q}{1+q}$ のとき，S の最小値とそれを与える q の値を求めよ．

（滋賀県立大学　2016）

徳島大学

2013年 医学部 第1問

数理
石井K

$\boxed{1}$ $P(x)$ は x^3 の係数が1の3次式である．$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが -3 である．また，$P(x)$ を $x-2$ で割ると割り切れ，その商を $Q(x)$ とする．$Q(x)$ を $x+3$ で割ると余りが7である．

(1) $Q(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) $Q(x)$ を求めよ．

(3) $P(x)$ を $(x-1)(x+3)$ で割ったときの商と余りを求めよ．

(1) $P(x) = (x-1)\cdot R(x) - 3 \quad \cdots ①$

$P(x) = (x-2)\cdot Q(x) \quad \cdots ②$

$Q(x) = (x+3)(x-\alpha) + 7 \quad \cdots ③$

$P(x)$ は x^3 の係数が1の3次式なので②より $Q(x)$ は x^2 の係数が1の2次式なので

①より，$P(1) = -3$，②より $P(1) = -Q(1)$ $\quad \therefore Q(1) = 3$

剰余の定理より．$Q(x)$ を $x-1$ で割った余りは $\underline{3}$ //

(2) (1)と③より．$Q(1) = 4(1-\alpha) + 7 = 3 \quad \therefore 1-\alpha = -1$

$\therefore \alpha = 2 \quad \therefore$ ③に代入して．$\underline{Q(x) = x^2 + x + 1}$ //

(3) (2)と②より $P(x) = (x-2)(x^2+x+1)$

$= x^3 + x^2 + x - 2x^2 - 2x - 2$

$= x^3 - x^2 - x - 2$

$$
\begin{array}{r}
x - 3 \\
x^2+2x-3 \,\big)\, \overline{x^3 - x^2 - x - 2} \\
x^3 + 2x^2 - 3x \\
\hline
-3x^2 + 2x - 2 \\
-3x^2 - 6x + 9 \\
\hline
8x - 11
\end{array}
$$

$\therefore$ 商が $x-3$，余りは $8x-11$ //

新潟大学

2015 年 第 1 問

$\boxed{1}$ 整数 a に対して $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - 1$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を求めよ．

(2) 3 次方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ．

(3) 3 次方程式 $P(x) = 0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ．

(1) 実際に割り算を実行すると，

$$
\begin{array}{r}
x^2+(1-a)x+1 \\
x-1 \enclose{longdiv}{x^3-ax^2+ax-1} \\
x^3-x^2 \\
\hline
(1-a)x^2+ax-1 \\
(1-a)x^2+ax-x \\
\hline
x-1 \\
x-1 \\
\hline
0
\end{array}
$$

よって，商は $\underline{x^2+(1-a)x+1}$ //

(2) (1) より $P(x)=0$ は次のように表される

$$(x-1)\{\underbrace{x^2+(1-a)x+1}_{\text{虚数解をもつ.}}\}=0$$

∴ (中かっこの中身) = 0 の判別式を D とおくと，

$D=(1-a)^2-4<0$ ∴ $(a-1)^2<4$ ∴ $-2<a-1<2$ より

$-1<a<3$ a: 整数 より， $\underline{a=0,1,2}$ //

(3) $x^2+(1-a)x+1=0$ が整数の解のみをもてばよいので

解を α, β とおく 解と係数の関係より $\alpha\beta=1$

α, β : 整数 より， $(\alpha, \beta)=(1,1)$ または $(-1,-1)$

∴ $\alpha+\beta=a-1$ ∴ $a-1=2, -2$ ∴ $\underline{a=3, -1}$ //

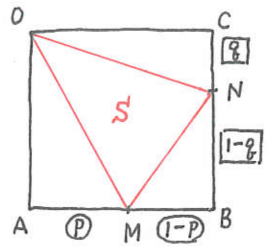
滋賀県立大学

2016年 環境科学部・工学部 第3問

$\boxed{3}$ 1辺の長さが1の正方形OABCにおいて，ABを $p:(1-p)$ に内分する点をM，BCを $(1-q):q$ に内分する点をNとする．また，△OMNの面積を S とする．ただし，$0<p<1$，$0<q<1$ である．

(1) S を p，q を用いて表せ．

(2) $p=\dfrac{1-q}{1+q}$ のとき，S の最小値とそれを与える q の値を求めよ．



(1) $S=$ (正方形OABC) $-\triangle$OAM $-\triangle$NMB $-\triangle$ONC

$$= 1-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot p-\frac{1}{2}\cdot(1-p)(1-q)-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot q$$

$$= 1-\frac{p}{2}-\frac{1}{2}(1-p-q+pq)-\frac{q}{2}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}(1-pq)}\ _{\prime\prime}$$

(2) $p=\dfrac{1-q}{1+q}$ のとき

$$S=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{q(1-q)}{1+q}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{(1+q)(2-q)-2}{1+q}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(q-1+\frac{2}{q+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(q+1+\frac{2}{q+1}\right)-1$$

$q+1>0$ より，相加・相乗平均の関係を使って

$$(q+1)+\frac{2}{q+1}\geqq 2\sqrt{(q+1)\cdot\frac{2}{q+1}}$$

$$=2\sqrt{2}$$

(等号成立は $q+1=\dfrac{2}{q+1}$ すなわち，$q=\sqrt{2}-1$ のとき)

このとき p は，$p=\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

$$\therefore\ S\geqq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}-1$$

$$=\sqrt{2}-1$$

$\therefore$ S の最小値は $\underline{\sqrt{2}-1\ (p=q=\sqrt{2}-1\text{ のとき})}$ $_{\prime\prime}$