

1 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3-2a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ.

- (1) すべての自然数 n に対し、 a_n は $\frac{1}{3} \leq a_n < \frac{1}{2}$ を満たす有理数であることを示せ.
- (2) 一般項 a_n を $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ (ただし、 p_n, q_n は互いに素な自然数) と既約分数で表したとき、 p_{n+1} を p_n と q_n で、 q_{n+1} を p_n と q_n でそれぞれ表せ.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

(お茶の水女子大学 2017)

2 さいころを n 回ふり、 n 個の出た目の数をすべて掛け合わせた値を a_n とする. 次の問いに答えよ.

- (1) a_n が素数となる確率を n を用いて表せ.
- (2) a_n が 3 の倍数となる確率を n を用いて表せ.
- (3) a_n を 6 で割った余りが 1 となる確率を n を用いて表せ.
- (4) $a_n < 10$ となる確率を $n = 1, n = 2$ のときに求め、 $n \geq 3$ のときは n を用いて表せ.

(お茶の水女子大学 2017)

3 関数 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + x$ を考える. ここで、 a, b は実数とする. 今、曲線 $y = f(x)$ が、ある直線 l に 2 点で接しており、その 2 つの接点の x 座標が -1 と 1 であることがわかっている. このとき、次の問いに答えよ.

- (1) 定数 a, b の値と、直線 l の方程式を求めよ.
- (2) 直線 l と同じ傾きを持ち、曲線 $y = f(x)$ と接する直線が l の他にもう 1 つある. その直線の方程式を求めよ.
- (3) (2) で求めた直線と曲線 $y = f(x)$ とにより囲まれた領域のうち x 座標が 0 以上の部分の面積を求めよ.

(お茶の水女子大学 2017)