＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ xy 平面上を動く点 P$(x,\ y)$ の時刻 t における座標が以下のように与えられている．

$$x=\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right),\quad y=\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$$

以下の問いに答えよ．

(1) 点 P の時刻 t における速度を求めよ．

(2) 点 P の加速度の大きさが最大になる時刻 t を求めよ．

(3) x^2-xy+y^2 は時刻 t に依存しない定数であることを示せ．

(4) $-\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{5\pi}{6}$ の間に点 P が描く軌跡を $y=f(x)$ として表せ．

(5) 関数 $y=f(x)$ の増減を調べ，その概形を描け．

（山形大学　2018）

$\boxed{2}$ $y=e^x$ で与えられる曲線を C とする．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C に引いた接線のうち，原点を通る接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C，接線 ℓ，および y 軸で囲まれる図形 S の面積を求めよ．

(3) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ．

(4) 図形 S を y 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ．

（山形大学　2018）

$\boxed{3}$ 曲線 $y=2x^2$ を C_1 とし，C_1 上の点 $(1,\ 2)$ における接線を L とする．2 点 $(1,\ 2)$，$(3,\ 2)$ を通り，点 $(1,\ 2)$ における接線が L となる曲線 $y=ax^2+bx+c$ を C_2 とする．ただし，a，b，c は定数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 接線 L の方程式を求めよ．

(2) a，b，c の値を求めよ．

(3) $k>0$ を定数とし，曲線 C_2 と直線 $y=kx$ が異なる 2 点で交わるとき，次の(ｉ)，(ii)に答えよ．

(ｉ) 2 交点の x 座標 α，β $(\alpha<\beta)$ を k を用いて表せ．

(ii) 直線 $y=kx$ と曲線 C_1 で囲まれた図形の面積を S_1 とし，直線 $y=kx$ と曲線 C_2 で囲まれた図形の面積を S_2 とする．$S_1=S_2$ のときの k の値を求めよ．

（山形大学　2018）

$\boxed{4}$ 座標空間において，点 O を原点とし，4 点 A$(1,\ 2,\ 1)$，B$(2,\ -1,\ -3)$，C$(1,\ 1,\ 1)$，D$(3,\ 2,\ -1)$ がある．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) $\triangle\mathrm{AOB}$ の面積を求めよ．

(3) 2 点 O，A を通る直線を L_1，2 点 O，B を通る直線を L_2 とする．直線 L_1 上に点 E，直線 L_2 上に点 F をとる．ここで，点 E と点 F は異なるとする．いま，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は垂直で，2 点 E，F を通る直線 L_3 が点 D を通るとき，次の(ｉ)，(ii)に答えよ．

(ｉ) 直線 L_3 と xy 平面との交点の座標を求めよ．

(ii) 点 B と直線 L_3 上の点との距離の最小値を求めよ．

（山形大学　2018）

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)=\tan x+\dfrac{1}{\tan x}$ について，微分係数 $f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ を求めよ．

(2) xy 平面上に曲線 $C: y=(1-x)(2x+|x|+1)$ がある．C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) a を実数の定数とする．連立不等式

$$\begin{cases} |x-1| \leqq 2 \\ x^2-(2a+3)x+a^2+3a-10 \leqq 0 \end{cases}$$

を満たす実数 x が存在するように，a の値の範囲を定めよ．

（山形大学　2018）

$\boxed{6}$ 次の各問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n=\frac{\sqrt{2}n(n+1)(2n+7)}{6}$$

で表されるとき，次の(ｉ)，(ii)に答えよ．

(ｉ) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(ii) $a_n>220$ となる最小の自然数 n を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ が

$$b_1=417,\quad b_{n+1}=b_n+2n-42\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められているとき，次の(ｉ)，(ii)に答えよ．

(ｉ) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(ii) $b_n<0$ となるすべての自然数 n を求めよ．

（山形大学　2018）

$\boxed{7}$ 原点を出発点とし，x 軸上を動く点Pがある．白球6個と黒球4個が入っている袋から球を1個ずつ取り出す．取り出した球が白球であれば点Pは正の方向に1だけ進み，黒球であれば点Pは負の方向に1だけ進むこととする．ただし，取り出した球は袋に戻さない．このとき，次の問に答えよ．

(1) 球を2回取り出すとき，点Pが原点にある確率を求めよ．

(2) 球を8回取り出すとき，点Pの座標が2である確率を求めよ．

(3) 球を6回取り出すとき，2回目かつ6回目で点Pが原点にある確率を求めよ．

(4) 球を6回取り出すとき，6回目で点Pの座標が初めて4となる確率を求めよ．

（山形大学　2018）