

1 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ  $\frac{1}{2}$  のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く．

コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く．さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく．

たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，

A A B B A A B

となる．このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である．

- (1)  $n$  を正の整数とする． $n$  回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から  $n$  番目の文字が A となる確率を求めよ．
- (2)  $n$  を 2 以上の整数とする． $n$  回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から  $n-1$  番目の文字が A で，かつ  $n$  番目の文字が B となる確率を求めよ．

(東京大学 2015)



2015年文系第4問

1 初目 / 2 枚

数理  
石井K

4 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ  $\frac{1}{2}$  のコインを1枚用意し、次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ、表が出たときは文字列 AA を書き、裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ、同じ規則に従って、AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば、コインを5回投げ、その結果が順に表、裏、裏、表、裏であったとすると、得られる文字列は、

A A B B A A B

となる。このとき、左から4番目の文字は B、5番目の文字は A である。

- (1)  $n$  を正の整数とする。 $n$  回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n$  番目の文字が A となる確率を求めよ。
- (2)  $n$  を2以上の整数とする。 $n$  回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n-1$  番目の文字が A で、かつ  $n$  番目の文字が B となる確率を求めよ。

(1). 文字列 AA の代わりに AA' と表すことにする。

左から  $n$  番目の文字が A である確率を  $P_n$ 、A' である確率を  $Q_n$ 、  
B である確率を  $r_n$  とおく

$$\begin{cases} P_{n+1} = (Q_n + r_n) \cdot \frac{1}{2} \\ Q_{n+1} = P_n \\ r_{n+1} = (Q_n + r_n) \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_{n+1} = (Q_n + r_n) \cdot \frac{1}{2} \\ Q_{n+1} = P_n \\ r_{n+1} = P_{n+1} \end{cases}$$

$$\therefore P_{n+1} = \frac{1}{2}(P_{n-1} + P_n)$$

$$\therefore P_{n+1} - P_n = -\frac{1}{2}(P_n - P_{n-1}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2(P_{n-1} - P_{n-2}) = \dots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(P_2 - P_1)$$

$$\text{ここで、} P_1 = \frac{1}{2}, P_2 = \frac{1}{4} \text{ より } P_{n+1} - P_n = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \dots \textcircled{1}$$

$$\text{同様に、} P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n = P_n + \frac{1}{2}P_{n-1} = \dots = P_2 + \frac{1}{2}P_1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n = \frac{1}{2} \dots \textcircled{2} \quad \therefore \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より、} P_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3}$$

$$\text{このとき、} Q_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3}$$

$$\therefore \text{求める確率は、} P_n + Q_n = \frac{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3}$$



2015年文系第4問

2枚目/2枚.



4 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ  $\frac{1}{2}$  のコインを1枚用意し、次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ、表が出たときは文字列 AA を書き、裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ、同じ規則に従って、AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば、コインを5回投げ、その結果が順に表、裏、裏、表、裏であったとすると、得られる文字列は、

A A B B A A B

となる。このとき、左から4番目の文字は B, 5番目の文字は A である。

- (1)  $n$  を正の整数とする。  $n$  回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n$  番目の文字が A となる確率を求めよ。
- (2)  $n$  を2以上の整数とする。  $n$  回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n-1$  番目の文字が A で、かつ  $n$  番目の文字が B となる確率を求めよ。

(2).  $n-1$  番目に A がきて、  $n$  番目に B がくればよいので、

求める確率は、

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1 - (-\frac{1}{2})^{n-2}}{6} \quad (n \geq 2)$$