＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ n を自然数とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 方程式 $z^n = 1$ の解をすべて求め，極形式で表しなさい．ただし，解 z の偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(2) (1) で得られた解を偏角が小さい順に c_0，c_1，c_2，$\cdots$，c_{n-1} とおく．このとき，すべての $k = 0$，1，2，$\cdots$，$n-1$ に対して，

$$|c_{k+1} - c_k| = \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right)}$$

が成り立つことを示しなさい．ただし，$c_n = c_0$ とする．

(3) (2) の c_k に対して $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} |c_{k+1} - c_k|$ とするとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めなさい．

（山口大学　2018）

$\boxed{2}$ 実数 t に対して，xy 平面上で曲線

$$C : y = -x^3 + 3t^2x - 2t^3 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

を考える．t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，曲線 C が通過する領域を図示し，その面積 S を求めなさい．

（山口大学　2018）

$\boxed{3}$ n を自然数とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 連続な関数 $f(x)$ が区間 $[0,\ 1]$ で増加するとき，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leqq \int_0^1 f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

が成り立つことを示しなさい．

(2) a が正の有理数のとき，

$$n^{a+1} \leqq (a+1)\sum_{k=1}^{n} k^a \leqq (n+1)^{a+1}$$

が成り立つことを示しなさい．ただし，x^a が連続な関数であることを証明なしに用いてもよい．

（山口大学　2018）

$\boxed{4}$ 空間内の 3 点 A$(1,\ 3,\ -2)$，B$(3,\ 2,\ -1)$，C$(2,\ 1,\ 3)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S を求めなさい．

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ を含む平面に垂直なベクトルを $(x,\ y,\ 1)$ と表すとき，x，y の値をそれぞれ求めなさい．

(4) 原点を O とするとき，四面体 OABC の体積 V を求めなさい．

（山口大学　2018）

5 座標平面において，連立不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad y \leqq -x+8, \quad y \leqq -2x+12$$

の表す領域を D とし，a を正の定数とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax+y$ の最大値を M とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 2 直線 $y=-x+8$ と $y=-2x+12$ の交点を求め，領域 D を図示しなさい．

(2) $0<a<1$ のとき，M の値を求めなさい．

(3) $1 \leqq a$ のとき，a を用いて M を表しなさい．

（山口大学　2018）

6 箱の中に 1 から 9 までの番号が 1 つずつ書かれた 9 枚のカードが入っている．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 箱からカードを同時に 2 枚取り出すとする．取り出した 2 枚に書かれた番号が続きになっている確率を求めなさい．ただし，2 枚に書かれた番号が続きになっているというのは，4 と 5 のように，一方の番号が他方の番号より 1 だけ大きいかあるいは 1 だけ小さい場合である．

(2) 箱からカードを同時に 3 枚取り出すとする．取り出したカードのうち少なくとも 2 枚に書かれた番号が続きになっている確率を求めなさい．

(3) 箱からカードを同時に 4 枚取り出すとする．取り出したカードのうち少なくとも 2 枚に書かれた番号が続きになっている確率を求めなさい．

（山口大学　2018）

7 a を正の定数とし，$f(x)=x^2(x-3a)$ とおく．座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とし，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(-a,\ f(-a))$ における接線を ℓ とする．接線 ℓ が点 P 以外で曲線 C と交わる点を Q とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 点 Q の座標を a を用いて表しなさい．

(2) 線分 PQ と曲線 C で囲まれる図形の面積 S を a を用いて表しなさい．

(3) 曲線 C 上の点 $\mathrm{R}(a,\ f(a))$ を考える．線分 PQ，線分 RQ および曲線 C で囲まれる図形の面積を T_1 とする．また，線分 RQ と曲線 C で囲まれる図形の面積を T_2 とする．このとき，$\dfrac{T_1}{T_2}$ を求めなさい．

（山口大学　2018）

8 空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 3,\ -2)$，$\mathrm{B}(3,\ 2,\ -1)$，$\mathrm{C}(2,\ 1,\ 3)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S を求めなさい．

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ を含む平面に垂直なベクトルを $(x,\ y,\ 1)$ と表すとき，x，y の値をそれぞれ求めなさい．

(4) 原点を O とするとき，四面体 OABC の体積 V を求めなさい．

（山口大学　2018）

$\boxed{9}$ 座標平面において，連立不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad y \leqq -x+8, \quad y \leqq -2x+12$$

の表す領域を D とし，a を正の定数とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax+y$ の最大値を M とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 2 直線 $y=-x+8$ と $y=-2x+12$ の交点を求め，領域 D を図示しなさい．

(2) $0<a<1$ のとき，M の値を求めなさい．

(3) $1 \leqq a$ のとき，a を用いて M を表しなさい．

（山口大学　2018）

$\boxed{10}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1=1, \quad a_{n+1}=a_n^2-a_n+\frac{3}{4} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $b_n=a_n-\dfrac{1}{2}$ とおくとき，初項 b_1 の値を求め，さらに b_n を用いて b_{n+1} を表しなさい．

(2) (1) で定められた数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めなさい．

（山口大学　2018）

$\boxed{11}$ 次の問いに答えなさい．

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，方程式 $3\cos x-2\sin^2 x=0$ を満たす x の値を求めなさい．

(2) $f(x)=e^{\frac{2}{3}\cos x}\sin x\ \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ とするとき，$f(x)$ の最大値を求めなさい．

(3) (2) の $f(x)$ に対して，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積 S を求めなさい．

（山口大学　2018）

$\boxed{12}$ nを自然数とする．正三角形OABの各辺をn等分してできる点を通り，辺OA，OB，ABに平行な直線をすべて引く．これらの直線と辺OA，OB，ABの中の3本によって作られる正三角形のうち，正三角形OABからはみ出ないものを考える．そのような正三角形の個数をt_nとする．ただし，$n=1$のときは正三角形OABのみを考えて，$t_1=1$とする．このとき，次の問いに答えなさい．

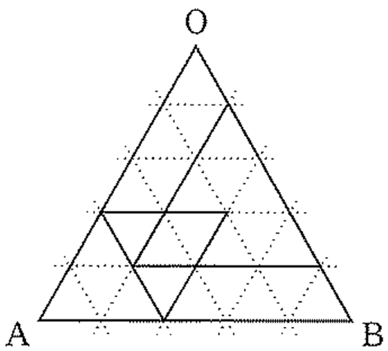
(1) $t_2=5$である．t_3の値を求めなさい．

(2) 1辺が辺AB上にある正三角形の個数をnを用いて表しなさい．

(3) 辺ABと1点のみを共有する正三角形の個数を，nが偶数と奇数の場合に分け，nを用いて表しなさい．

(4) $u_n=t_{2n-1}$とおくとき，$u_{n+1}-u_n$をnを用いて表しなさい．

(5) nが奇数のとき，nを用いてt_nを表しなさい．



図：$n=5$の場合

（山口大学　2018）