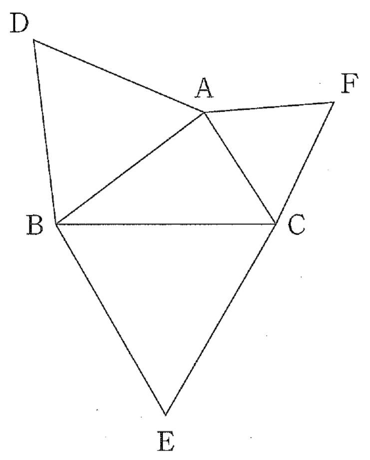
＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 下図のように，△ABC の外部に 3 点 D，E，F を △ABD，△BCE，△CAF がそれぞれ正三角形になるようにとる．△ABC の面積を S，3 辺の長さを BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とおくとき，以下の問いに答えよ．



(1) $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とおくとき，$\sin\theta$ を b，c，S を用いて，$\cos\theta$ を a，b，c を用いて表せ．

(2) DC^2 を a，b，c，S を用いて表し，$\mathrm{DC}^2 = \mathrm{EA}^2 = \mathrm{FB}^2$ が成り立つことを示せ．

(3) 3 つの正三角形の面積の平均を T とおくとき，DC^2 を S と T を用いて表せ．

（熊本大学　2016）

2 3 つの直線 $x - y + 2 = 0$，$x + y - 12 = 0$，$7x - y - 4 = 0$ で囲まれた三角形に内接する円の面積を S とする．$\dfrac{4S}{\pi}$ の値を求めよ．

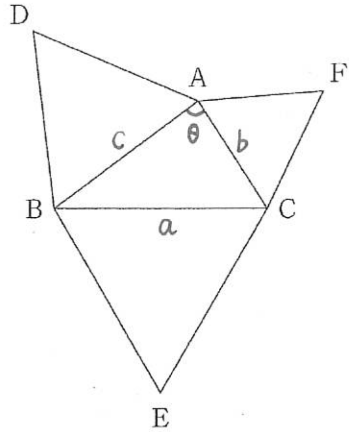
（自治医科大学　2017）

熊本大学

2016年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 下図のように，△ABCの外部に3点D，E，Fを△ABD，△BCE，△CAFがそれぞれ正三角形になるようにとる．△ABCの面積をS，3辺の長さを$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$とおくとき，以下の問いに答えよ．



(1) $\angle\mathrm{BAC}=\theta$とおくとき，$\sin\theta$を$b$，$c$，$S$を用いて，$\cos\theta$を$a$，$b$，$c$を用いて表せ．

(2) DC^2をa，b，c，Sを用いて表し，$\mathrm{DC}^2=\mathrm{EA}^2=\mathrm{FB}^2$が成り立つことを示せ．

(3) 3つの正三角形の面積の平均をTとおくとき，DC^2をSとTを用いて表せ．

(1) $S=\frac{1}{2}bc\sin\theta$ より，$\underline{\sin\theta=\frac{2S}{bc}}$ //　余弦定理より，$\underline{\cos\theta=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$ //

(2) 余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{DC}^2&=c^2+b^2-2bc\cdot\cos(\theta+60^\circ)\\&=c^2+b^2-2bc\cdot\left(\cos\theta\cdot\frac{1}{2}-\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=c^2+b^2-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\sqrt{3}\cdot 2S\\&=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}S\end{aligned}$$

△ADCと△ABFにおいて，AD = AB，AC = AF

∠DAC = ∠BAF $(=\theta+60^\circ)$

∴ △ADC ≡ △ABF

よって，DC = FBより，$\mathrm{DC}^2=\mathrm{FB}^2$

△DBCと△ABEにおいて，DB = AB，BC = BE

∠DBC = ∠ABE $(=\angle\mathrm{ABC}+60^\circ)$

∴ △DBC ≡ △ABE

よって，DC = AEより，$\mathrm{DC}^2=\mathrm{EA}^2$

以上より，$\mathrm{DC}^2=\mathrm{EA}^2=\mathrm{FB}^2$ ▨

(3) $T=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ+\frac{1}{2}b^2\sin 60^\circ+\frac{1}{2}c^2\sin 60^\circ\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2)$

∴ $a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}T$

$\underline{\mathrm{DC}^2=2\sqrt{3}(S+T)}$ //

2017年 医学部 第11問

増田

$\boxed{11}$ 3つの直線 $x-y+2=0$, $x+y-12=0$, $7x-y-4=0$ で囲まれた三角形に内接する円の面積を S とする．$\dfrac{4S}{\pi}$ の値を求めよ．

$$\begin{cases} x-y+2=0 & \cdots ① \\ x+y-12=0 & \cdots ② \\ 7x-y-4=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①と② の交点は $A(5,7)$

②と③ の交点は $B(2,10)$

①と③ の交点は $C(1,3)$

点Cを原点にもっていくために、x方向に -1, y方向に -3 移動させると

$A'(4,4)$, $B'(1,7)$, $C'(0,0)$

$\triangle A'B'C'$ の面積は、サラスの公式より

$$(\triangle A'B'C' \text{の面積}) = \frac{1}{2}\left|4\times7-4\times1\right| = \frac{24}{2} = 12$$

次に、三角形の辺の長さは $AB=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$

$AC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

内接円の半径を r とすると、

$$\frac{1}{2}r(AB+BC+AC)=\frac{r}{2}\times12\sqrt{2}=12$$

$$\therefore r=\sqrt{2}$$

よって円の面積 $S=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\pi=2\pi$

$$\frac{4S}{\pi}=\frac{4\times2\pi}{\pi}=\underline{8}\ /\!/$$