＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ i を虚数単位とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 複素数 $c=1+i$ について，c と共役な複素数 $\overline{c}$ および $|c|^2$ をそれぞれ求めよ．

(2) 複素数 z が $|z|=1$ を満たすとする．このとき，$z+\dfrac{1}{z}$ が実数であることを証明せよ．

(3) α，β を複素数として α の実部と虚部がともに正であるとする．また，$|\alpha|=|\beta|=1$ とする．複素数 $i\alpha$，$\dfrac{i}{\alpha}$，β で表される複素数平面上の 3 点が，ある正三角形の 3 頂点であるとき，α，β をそれぞれ求めよ．

（静岡大学　2016）

$\boxed{2}$ 複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円 C 上に点 z がある．a を実数の定数とし，

$$w=z^2-2az+1$$

とおく．

(1) $|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ．

(2) 点 z が C 上を一周するとき，$|w|$ の最小値を a を用いて表せ．

（北海道大学　2016）

2016年 理（物・化）・工・情報 第4問

$\boxed{4}$ iを虚数単位とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 複素数$c = 1 + i$について，cと共役な複素数$\overline{c}$および$|c|^2$をそれぞれ求めよ．

(2) 複素数zが$|z| = 1$を満たすとする．このとき，$z + \dfrac{1}{z}$が実数であることを証明せよ．

(3) α，βを複素数としてαの実部と虚部がともに正であるとする．また，$|\alpha| = |\beta| = 1$とする．複素数$i\alpha$，$\dfrac{i}{\alpha}$，βで表される複素数平面上の3点が，ある正三角形の3頂点であるとき，α，βをそれぞれ求めよ．

(1) $\overline{c} = 1 - i$，$|c|^2 = 2$ //

(2) $|z| = 1$より．$z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$と表せる．

$$z + \frac{1}{z} = \cos\theta + i\sin\theta + (\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}$$

ド・モアブル

$$= \cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta$$

$$= 2\cos\theta \text{（実数）} \blacksquare$$

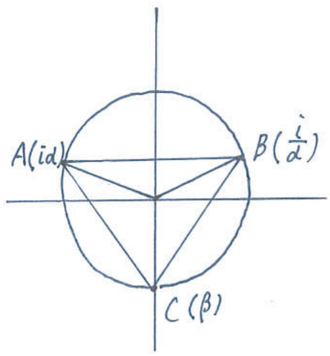
(3) αは実部が正，虚部が正，$|\alpha| = 1$より．$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$と表せる．

このとき．$i\alpha = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$，$\frac{i}{\alpha} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$A(i\alpha)$，$B\left(\frac{i}{\alpha}\right)$，$C(\beta)$とすると．$|i\alpha| = \left|\frac{i}{\alpha}\right| = |\beta| = 1$であるから

正三角形ABCは単位円に内接する．原点をOとすると．

$\angle AOB = \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{2\pi}{3}$ であるから．$\theta = \frac{\pi}{3}$



よって．$i\alpha = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$\frac{i}{\alpha} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$\alpha = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\therefore \beta = i\alpha \cdot \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= -i$$

$\therefore$ $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\beta = -i$ //

北海道大学

2016年 理系 第1問

$\boxed{1}$ 複素数平面上の点0を中心とする半径2の円 C 上に点 z がある．a を実数の定数とし，

$$w = z^2 - 2az + 1$$

とおく．

(1) $|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ．

(2) 点 z が C 上を一周するとき，$|w|$ の最小値を a を用いて表せ．

(1) $|w|^2 = w\cdot\overline{w}$

$= (z^2 - 2az + 1)(\overline{z}^2 - 2a\overline{z} + 1)$

$= z^2\overline{z}^2 - 2az^2\overline{z} + z^2 - 2az\overline{z}^2 + 4a^2z\overline{z} - 2az + \overline{z}^2 - 2a\overline{z} + 1$

$= |z|^4 - 2az|z|^2 + z^2 - 2a\overline{z}|z|^2 + 4a^2|z|^2 - 2az + \overline{z}^2 - 2a\overline{z} + 1$

$|z| = 2$ であるから，

$|w|^2 = 16 - 10a(z + \overline{z}) + 16a^2 + z^2 + \overline{z}^2 + 1$

ここで，$z + \overline{z} = 2x$，$z^2 + \overline{z}^2 = (z + \overline{z})^2 - 2|z|^2 = 4x^2 - 8$ より，

$|w|^2 = 17 - 10a\cdot 2x + 16a^2 + 4x^2 - 8$

$= \underline{4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9}$ //

(2) $|w|^2 = 4\left(x - \frac{5}{2}a\right)^2 - 9a^2 + 9$

$-2 \leqq x \leqq 2$ であるから

(i) $-2 \leqq \frac{5}{2}a \leqq 2$ すなわち，$-\frac{4}{5} \leqq a \leqq \frac{4}{5}$ のとき

$|w|$ の最小値は，$\sqrt{-9a^2+9} = 3\sqrt{1-a^2}$

(ii) $\frac{5}{2}a > 2$ すなわち，$a > \frac{4}{5}$ のとき．

$|w|$ は $x = 2$ のとき，最小値 $\sqrt{(4a-5)^2} = |4a-5|$ をとる．

(iii) $\frac{5}{2}a < -2$ すなわち，$a < -\frac{4}{5}$ のとき．

$|w|$ は $x = -2$ のとき，最小値 $\sqrt{(4a+5)^2} = |4a+5|$ をとる

(i)～(iii) より，$|w|$ の最小値は

$$\begin{cases} |4a+5| & \left(a < -\frac{4}{5} \text{のとき}\right) \\ 3\sqrt{1-a^2} & \left(-\frac{4}{5} \leqq a \leqq \frac{4}{5} \text{のとき}\right) \\ |4a-5| & \left(a > \frac{4}{5} \text{のとき}\right) \end{cases}$$

—— //