$\boxed{1}$ 大小 2 つのサイコロを振った場合の出目について，以下の設問に答えよ．

(1) 少なくとも一方の出目が偶数である確率を計算せよ．

(2) 出目の積が 10 以下である確率を計算せよ．

(3) 出目の和が偶数であるか，または積が 10 より大きい確率を計算せよ．

(4) 大きいサイコロの出目を a，小さいサイコロの出目を b とした場合に，2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解が整数となる確率を計算せよ．

（旭川大学　2016）

$\boxed{2}$ a を $0 < a < 1$ を満たす定数とし，x，y が $xy^2 = a^3$ を満たすとする．$x > 0$，$y > 0$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $X = \log_a x$，$Y = \log_a y$ とおくとき，X と Y の関係式を求めよ．

(2) x，y が $\log_a x \cdot \log_a y \geqq 1$ を満たすとき，y のとり得る値の範囲を求めよ．

（愛知教育大学　2016）

$\boxed{3}$ $a_1=3$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1) n を 2 以上の自然数とするとき，a_{n+1} を a_n，a_{n-1} で表しなさい．

(2) $a_{n+1}-2a_n$ を n の式で表しなさい．

(3) a_n を n の式で表しなさい．

（大分大学　2017）

旭川大学

2016年 保健福祉（2期）第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 大小2つのサイコロを振った場合の出目について，以下の設問に答えよ．

(1) 少なくとも一方の出目が偶数である確率を計算せよ．

(2) 出目の積が10以下である確率を計算せよ．

(3) 出目の和が偶数であるか，または積が10より大きい確率を計算せよ．

(4) 大きいサイコロの出目を a，小さいサイコロの出目を b とした場合に，2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が整数となる確率を計算せよ．

(1) ともに奇数となる確率は．$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

余事象より．$1-\frac{1}{4}=\underline{\frac{3}{4}}$ //

(2) $(1,1),(1,2),\cdots,(1,6)$,

$(2,1),(2,2),\cdots,(2,5)$,

$(3,1),(3,2),(3,3)$

$(4,1),(4,2)$

$(5,1),(5,2)$

$(6,1)$

の19通り

よって．$\underline{\frac{19}{36}}$ //

(3) 和が偶数 … $\frac{1}{2}$，積が10より大 … $1-\frac{19}{36}=\frac{17}{36}$

和が偶数 かつ 積が10より大 … $(2,6),(3,5),(4,4),(4,6),(5,3),(5,5),(6,2)$

$(6,4),(6,6)$

の9通り $\therefore \frac{9}{36}$

以上より．$\frac{1}{2}+\frac{17}{36}-\frac{9}{36}=\underline{\frac{13}{18}}$ //

(4) 判別式をDとすると．$D=a^2-4b\geqq 0$ $\therefore a^2\geqq 4b$

$\therefore (a,b)=(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),$

$(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$

このうち解が整数となるのは．$(a,b)=(2,1),(3,2),(4,3),(4,4),(5,4),(5,6),(6,5)$

の7通り

$\therefore \underline{\frac{7}{36}}$ //

愛知教育大学

2016年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ a を $0 < a < 1$ を満たす定数とし，x，y が $xy^2 = a^3$ を満たすとする．$x > 0$，$y > 0$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $X = \log_a x$，$Y = \log_a y$ とおくとき，X と Y の関係式を求めよ．

(2) x，y が $\log_a x \cdot \log_a y \geqq 1$ を満たすとき，y のとり得る値の範囲を求めよ．

(1) $xy^2 = a^3$ の両辺，底が a の対数をとると，

$$\log_a x + 2\log_a y = 3$$

よって，$\underline{X + 2Y = 3}$ //

(2) $\log_a x \cdot \log_a y \geqq 1$ より，$XY \geqq 1$

∴ (1)より，$X + 2Y = 3$ かつ $XY \geqq 1$

X を消去して，

$(3 - 2Y)Y \geqq 1$

∴ $2Y^2 - 3Y + 1 \leqq 0$

$(2Y - 1)(Y - 1) \leqq 0$

∴ $\frac{1}{2} \leqq Y \leqq 1$

$\frac{1}{2} \leqq \log_a y \leqq 1$

$\log_a a^{\frac{1}{2}} \leqq \log_a y \leqq \log_a a$

$0 < a < 1$ であるから，$\underline{a \leqq y \leqq \sqrt{a}}$ //

大分大学

2017年 経済学部 第4問

増田

$\boxed{4}$ $a_1=3,\ \sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_n+1$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) で定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

(1) n を2以上の自然数とするとき，a_{n+1} を $a_n,\ a_{n-1}$ で表しなさい.

(2) $a_{n+1}-2a_n$ を n の式で表しなさい.

(3) a_n を n の式で表しなさい.

(1)

$$4a_n+1=\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}$$

$$-)\ 4a_{n-1}+1=\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n \quad (\text{ただし } n \geqq 2)$$

$$4a_n-4a_{n-1}=a_{n+1}$$

$$a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1} \quad \cdots ①$$

(2) ①の数列の特性方程式は

$$x^2=4x-4$$
$$x^2-4x+4=0$$
$$(x-2)^2=0$$

よって

$$a_{n+1}-2a_n=2(a_n-2a_{n-1})$$

$b_n=a_{n+1}-2a_n$ とおくと，b_n は初項4，公比2の等比数列

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{2} a_k = a_1+a_2=4a_1+1 \\ a_2=3a_1+1 \\ \quad =3\times3+1=10 \\ b_1=a_2-2a_1 \\ \quad =10-2\times3=4 \end{cases}$$

$$b_n=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$$

$$a_{n+1}-2a_n=2^{n+1} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(3) $a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}$

両辺を 2^{n+1} で割る

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+1$$

$c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，

$$c_{n+1}=c_n+1$$

c_n は初項 $\frac{3}{2}$，公差1の等差数列

$$c_1=\frac{a_1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$c_n=\frac{3}{2}+(n-1)\cdot1$$
$$=n+\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_n}{2^n}=n+\frac{1}{2}$$

$$\therefore a_n=n\cdot2^n+2^{n-1}$$

これは，$a_1=1\cdot2+2^0=3$ となるので，$n=1$ でも成り立つ

$$a_n=2^{n-1}(2n+1) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$