$\boxed{1}$ $m > 1$ とし，連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 \\ (y-2mx)(y+2mx-3m^2) \leqq 0 \end{cases}$$

の表す領域を D とする．以下の問に答えよ．

(1) $y = x^2$ と $y = -2mx + 3m^2$ の共有点を求めよ．

(2) 領域 D を図示せよ．

(3) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が D 内を動くとき，$2y - x$ の最大値と最小値を求めよ．

(4) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が D 内を動くとき，$2y - 6mx$ の最大値と最小値を求めよ．

（岐阜大学　2015）

$\boxed{2}$ xy 平面における 2 つの放物線 $C : y = (x-a)^2 + b$，$D : y = -x^2$ を考える．

(1) C と D が 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a，b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ．

(2) 実数 a，b が (1) の条件を満たすとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線は，放物線 $y = -x^2 - \dfrac{1}{4}$ に接することを示せ．

（東北大学　2018）

$\boxed{3}$ t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，xy 平面上の 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t)$，$\mathrm{Q}(t-1,\ 1-t)$ を結ぶ線分 PQ の通過する領域を D とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) D の面積を求めよ．

（東京海洋大学　2016）

$\boxed{4}$ 連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq |2x+1| \\ 2x-3y+9 \geqq 0 \end{cases}$$

の表す領域を D とするとき，次の問に答えよ．

(1) 領域 D を図示せよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，x^2-4x+y^2 の最大値 M と最小値 m を求めよ．また，M，m を与える D 内の点の座標を求めよ．

（香川大学　2018）

$\boxed{5}$ 3つの実数 x，y，$12-x^2$ を3辺の長さとする三角形が描けるような点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が存在する領域を平面上に図示せよ．また，その領域の面積を求めよ．

（学習院大学　2013）

$\boxed{6}$ 硬貨が2枚ある．最初は2枚とも表の状態で置かれている．次の操作を n 回行った後，硬貨が2枚とも裏になっている確率を求めよ．

（操作）2枚とも表，または2枚とも裏のときには2枚の硬貨両方を投げ，表と裏が1枚ずつのときには，表になっている硬貨だけを投げる．

（一橋大学　2016）

$\boxed{7}$ 座標空間において，1辺の長さが1の立方体OABC-DEFGをなす8つの頂点O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(0, 1, 0)およびD(0, 0, 1)，E(1, 0, 1)，F(1, 1, 1)，G(0, 1, 1)をとる．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく．辺DE上に点P$(s,\ 0,\ 1)$ $(0 \leqq s \leqq 1)$，辺CB上に点Q$(t,\ 1,\ 0)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$をとり，3点O，P，Qを含む平面と直線GFとの交点をRとする．四角形OPRQの面積をUとする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ およびs，tで表せ．

(2) 内積$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$s$，$t$で表せ．また，$U$を$s$，$t$で表せ．

(3) 点Rが辺GF上にあるとき，Uの最大値，最小値を求めよ．またそのときのs，tの値を求めよ．

（新潟大学　2019）

$\boxed{8}$ 平面上に三角形OABと点Cがある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくとき，内積に関する等式 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$ が成り立つとする．次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{OB} \perp \mathrm{CA}$，$\mathrm{OC} \perp \mathrm{AB}$ が成り立つことを示せ．ただし，点Cは3点O，A，Bと異なるものとする．

(2) 点Dを $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$ が成り立つ点とする．このとき，点Dは三角形OABの外心であることを示せ．

(3) $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$，$\cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{1}{3}$ とする．

（i）$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ が成り立つような x，y の値を求めよ．

（ii）t を $0 < t < 1$ を満たす実数とし，辺ABを $t : (1-t)$ に内分する点をEとする．3点O，C，Eが一直線上にあるとき，t の値を求めよ．

（広島市立大学　2018）

岐阜大学

2015年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $m > 1$ とし，連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 \\ (y-2mx)(y+2mx-3m^2) \leqq 0 \end{cases}$$

の表す領域を D とする．以下の問に答えよ．

(1) $y = x^2$ と $y = -2mx + 3m^2$ の共有点を求めよ．
(2) 領域 D を図示せよ．
(3) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が D 内を動くとき，$2y - x$ の最大値と最小値を求めよ．
(4) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が D 内を動くとき，$2y - 6mx$ の最大値と最小値を求めよ．

(1) $x^2 + 2mx - 3m^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3m)(x-m) = 0$

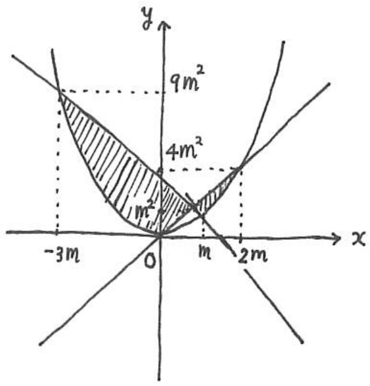
$\therefore x = -3m,\ m$

共有点は $(-3m,\ 9m^2),\ (m,\ m^2)$ //

(2) $y = x^2$ と $y = 2mx$ の共有点は $(0,0),\ (2m,\ 4m^2)$

$y = 2mx$ と $y = -2mx + 3m^2$ の共有点は $\left(\frac{3m}{4},\ \frac{3m^2}{2}\right)$

∴ 右図の斜線部分(ただし境界線も含む)



(3) $2y - x = k$ とおくと，$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k$

∴ この直線が D と共有点をもつとき，k の最大値は，

$(-3m,\ 9m^2)$ を通るときで最小値は $(0,0)$ を通るとき

∴ 最大値 $18m^2 + 3m$，最小値 0 //

(4) $2y - 6mx = k$ とおくと，$y = 3mx + \frac{k}{2}$

(3)と同様に考えると，最大となるのは $(-3m,\ 9m^2)$ を通るとき

最小となる候補は，$y = x^2$ に接するときと，$\left(\frac{3}{4}m,\ \frac{3}{2}m^2\right)$ を通るとき

(i) $y = x^2$ と接するときは，$k = -\frac{9}{2}m^2$

(ii) $\left(\frac{3}{4}m,\ \frac{3}{2}m^2\right)$ を通るときは，$k = -\frac{3}{2}m^2$

∴ 最大値 $36m^2$，最小値 $-\frac{9}{2}m^2$ //

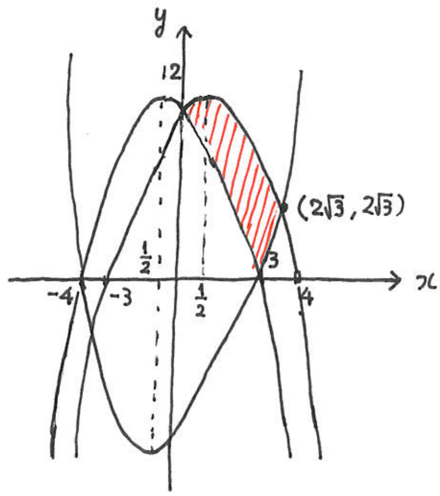
2013 年 経済学部 第 4 問

数理 石井K

4 3 つの実数 x, y, $12-x^2$ を 3 辺の長さとする三角形が描けるような点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が存在する領域を平面上に図示せよ．また，その領域の面積を求めよ．

三角形の成立条件より

$$\begin{cases} x+y>12-x^2 \\ x+12-x^2>y \\ y+12-x^2>x \end{cases} \iff \begin{cases} y>-x^2-x+12 \\ y<-x^2+x+12 \\ y>x^2+x-12 \end{cases}$$



∴ 求める領域は右のグラフの

斜線部分，ただし境界線は含まない

$$S=\int_0^3 -x^2+x+12-(-x^2-x+12)\,dx$$

$$+\int_3^{2\sqrt{3}} -x^2+x+12-(x^2+x-12)\,dx$$

$$=\int_0^3 2x\,dx+\int_3^{2\sqrt{3}} -2x^2+24\,dx$$

$$=\Big[x^2\Big]_0^3+\Big[-\frac{2}{3}x^3+24x\Big]_3^{2\sqrt{3}}$$

$$=9-\frac{2}{3}\cdot12\cdot2\sqrt{3}+24\cdot2\sqrt{3}+18-72$$

$$=\underline{32\sqrt{3}-45}\ /\!/$$

一橋大学

2016年第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 硬貨が2枚ある．最初は2枚とも表の状態で置かれている．次の操作を n 回行った後，硬貨が2枚とも裏になっている確率を求めよ．

（操作）2枚とも表，または2枚とも裏のときには2枚の硬貨両方を投げ，表と裏が1枚ずつのときには，表になっている硬貨だけを投げる．

操作を n 回行った後，2枚とも裏になっている確率を p_n，2枚とも表になっている確率を q_n とおく

$n+1$ 回行った後，2枚とも裏になるのは次の場合である．

- n 回行った後，2枚とも表，または2枚とも裏で，$n+1$ 回目に2枚を投げ，2枚とも裏になる
- n 回行った後，表と裏が1枚ずつで，表になっている方を投げ，それが裏になる．

よって，$p_{n+1} = (p_n + q_n)\cdot\frac{1}{4} + (1 - p_n - q_n)\cdot\frac{1}{2}$

$\therefore\ p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n - \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}$ …①

同様に，$n+1$ 回行った後，2枚とも表になるのは次の場合である．

- n 回行った後，2枚とも表，または2枚とも裏で，$n+1$ 回目に2枚を投げ，2枚とも表になる

よって，$q_{n+1} = (p_n + q_n)\cdot\frac{1}{4}$

$\therefore\ q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n$ …②

①＋②より，$p_{n+1} + q_{n+1} = \frac{1}{2}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

ここで，$p_1 = \frac{1}{4}$，$q_1 = \frac{1}{4}$ より，$p_1 + q_1 = \frac{1}{2}$

以上から，$p_n + q_n = \frac{1}{2}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ …③

①，③より，$p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - p_n\right) + \frac{1}{2}$

$\therefore\ p_{n+1} = \frac{3}{8}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

以上より求める確率は，

$n=1$ のとき $\frac{1}{4}$，$n \geqq 2$ のとき $\frac{3}{8}$ //