$\boxed{1}$ $\triangle$ABC において，AB $= \sqrt{3}$，BC $= \sqrt{5}$，AC $= 2$ とする．辺 BC 上に点 B と異なる点 P があり，AP $= \sqrt{3}$ とする．また，辺 AB の中点を Q，線分 AP と線分 CQ との交点を R とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\triangle$ABC の面積 S を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(3) $\triangle$AQR の面積 T を求めよ．

山形大学

2016年 医学部 第1問

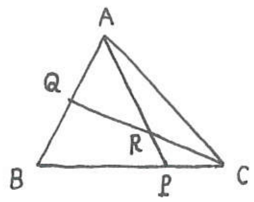
数理 石井K

$\boxed{1}$ $\triangle$ABCにおいて，AB $=\sqrt{3}$，BC $=\sqrt{5}$，AC $=2$とする．辺BC上に点Bと異なる点Pがあり，AP $=\sqrt{3}$とする．また，辺ABの中点をQ，線分APと線分CQとの交点をRとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ と $\triangle$ABCの面積 S を求めよ．

(2) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(3) $\triangle$AQRの面積 T を求めよ．



(1) $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2$

$\quad =|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AB}|^2$

よって，$(\sqrt{5})^2=2^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+(\sqrt{3})^2$

$\therefore\ \underline{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1}$ //

$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3\cdot4-1^2}=\underline{\frac{\sqrt{11}}{2}}$ //

(2) $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AC}\quad(0<s<1)$ とおくと，

$|\overrightarrow{AP}|^2=s^2|\overrightarrow{AB}|^2+2s(1-s)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+(1-s)^2|\overrightarrow{AC}|^2$

$\therefore\ 3=3s^2+2s(1-s)+4(1-s)^2$

$\therefore\ 5s^2-6s+1=0$

$(5s-1)(s-1)=0$

$0<s<1$ より，$s=\frac{1}{5}$ $\quad\therefore\ \underline{\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}}$ //

(3) メネラウスの定理より，

$\frac{CP}{PB}\cdot\frac{AB}{AQ}\cdot\frac{QR}{RC}=1$

$\therefore\ \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{QR}{RC}=1\qquad\therefore\ QR:RC=2:1$

$\therefore\ T=S\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$

$\quad=\underline{\frac{\sqrt{11}}{6}}$ //