$\boxed{1}$ 1辺の長さが1の正四面体PABCにおいて，辺PA，BC，PB，ACの中点をそれぞれK，L，M，Nとする．線分KL，MNの中点をそれぞれQ，Rとし，△ABCの重心をGとする．また，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{c}$ とおく．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，点QとRが一致することを示しなさい．

(2) 3点P，Q，Gが同一直線上にあることを示しなさい．また，PQ : QGを求めなさい．

(3) PG $\perp$ ABを示しなさい．

（大分大学　2017）

大分大学

2017年 経済学部 第1問

増田

$\boxed{1}$ 1辺の長さが1の正四面体PABCにおいて，辺PA，BC，PB，ACの中点をそれぞれK，L，M，Nとする．線分KL，MNの中点をそれぞれQ，Rとし，△ABCの重心をGとする．また，$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{PC}=\vec{c}$ とおく．

(1) $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，点QとRが一致することを示しなさい．

(2) 3点P，Q，Gが同一直線上にあることを示しなさい．また，PQ：QGを求めなさい．

(3) PG ⊥ ABを示しなさい．

(1) QはKLの中点なので

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{PL}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)$$
$$=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

RはMNの中点なので

$$\overrightarrow{PR}=\frac{\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{b}}{2}+\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}\right)$$
$$=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PR}$ となり，点QとRは一致することが示された。

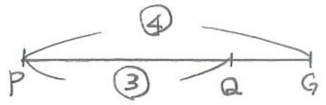
(2) $\boxed{\text{3点P, Q, Rが同一直線上にある} \iff \overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{PG}\text{ となる実数}k\text{がある}}$

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

Gは△ABCの重心なので

$$\overrightarrow{PG}=\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PG}$ と表されるので、3点P, Q, Gは同一直線上にあることが示された。



また，PQ : QG = 3 : 1

(3) $\boxed{PG\perp AB \iff \overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \quad \text{ただし } \overrightarrow{PG}\neq 0,\ \overrightarrow{AB}\neq 0}$

$$\overrightarrow{PG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}=\vec{b}-\vec{a}$$

$$\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=\frac{1}{3}(\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})$$
$$=\frac{1}{3}(-|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})$$

ここで、$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos60°$ だから、

括弧内がすべてキャンセルして

$$\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

いま、P, G, A, Bはすべて異なる点なので

$\overrightarrow{PG}\neq 0$, $\overrightarrow{AB}\neq 0$

よって $\overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{AB}$