

1 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2n}{n+1}a_n + \frac{2^{n+1}}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ.

(2) 一般項 a_n を推測し, それが正しいことを数学的帰納法によって示せ.

(3) 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2}$$

(三重大学 2017)

2 虚部が正の複素数 z が表す複素数平面上の点を P とし, $w = \frac{z^2}{|z|}$ で与えられる点を Q とする. また, 原点を O とする.

(1) z の極形式を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とするとき, w の極形式を求めよ. さらに $\triangle OPQ$ の面積を r と θ を用いて表せ.

(2) z が $|z - 4i| = 2|z - i|$ を満たして動くとき, $\triangle OPQ$ の面積の最大値を求めよ.

(三重大学 2017)

3 k を定数として θ の方程式

$$\cos 2\theta = k \sin \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える.

- (1) この方程式が異なる二つの解を持つような k の範囲を求めよ.
- (2) k が (1) の範囲にあるとして, 二つの解を $\theta = \alpha, \beta$ とおく.
 $\sin \alpha \sin \beta$ を求めよ. さらに $\sin \alpha + \sin \beta, \cos(\alpha + \beta)$ の
値を k を用いて表せ.

(三重大学 2017)

4 実数 a, b に対し, $I(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a - b \sin x)^2 dx$ と
する.

- (1) $I(a, b) = I(0, b) + 2\pi a^2$ を示せ.
- (2) $I(0, b)$ を求めよ.
- (3) $I(a, b) \geq \frac{2\pi(\pi^2 - 6)}{3}$ を示せ. また等号が成り立つとき
の a, b の値を求めよ.

(三重大学 2017)