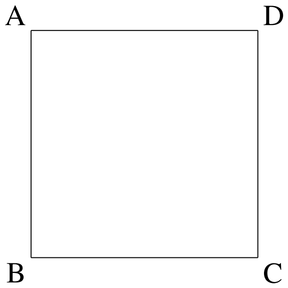
$\boxed{1}$ α, β, a, b, c, d を実数とする．以下の問に答えよ．

(1) 「すべての実数 x について $x^2+\alpha x+\beta>0$ である」が成り立つための α, β に関する条件を求めよ．

(2) 「すべての実数 y について $ay+b<0$ である」が成り立つための a, b に関する条件を求めよ．

(3) 「すべての実数 x, y について $x^2+4xy+4y^2+5x+cy+d>0$ である」が成り立つための c, d に関する条件を求めよ．

$\boxed{2}$ 下図のような 1 辺の長さ 10 cm の正方形 ABCD がある．点 P および点 Q は時刻 0 に A および B をそれぞれ出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒 1 cm 進む．また，点 R は時刻 0 に B を出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒 2 cm 進む．点 R が A に達するまでに △PQR の面積が 35 cm^2 となる時刻をすべて求めよ．



$\boxed{3}$ a を実数とする．x の 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1\leqq x\leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $m\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ．

(3) a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ．

岐阜大学

2016年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ α, β, a, b, c, d を実数とする．以下の問に答えよ．

(1) 「すべての実数 x について $x^2+\alpha x+\beta>0$ である」が成り立つための α, β に関する条件を求めよ．

(2) 「すべての実数 y について $ay+b<0$ である」が成り立つための a, b に関する条件を求めよ．

(3) 「すべての実数 x, y について $x^2+4xy+4y^2+5x+cy+d>0$ である」が成り立つための c, d に関する条件を求めよ．

(1) $x^2+\alpha x+\beta=0$ の判別式を D とすると，$D<0$ であるから

$D=\alpha^2-4\beta<0$ 　　$\therefore\ \underline{\alpha^2-4\beta<0}$ //

(2) 直線 $z=ay+b$ がすべての実数 y について，y 軸より下にあるから

$a=0$ であることが必要条件

そのとき，$z=b$ となるから $b<0$

以上より，$\underline{a=0 \text{ かつ } b<0}$ //

(3) $x^2+(4y+5)x+4y^2+cy+d>0$

左辺を x の式とみて，(1)より $(4y+5)^2-4(4y^2+cy+d)<0$

$\therefore\ 40y+25-4(cy+d)<0$

$(40-4c)y+25-4d<0$

y の式とみて(2)より，$40-4c=0$ かつ $25-4d<0$

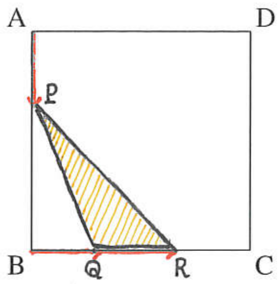
$\therefore\ \underline{c=10,\ d>\frac{25}{4}}$ //

千葉大学

2014 年 教育学部（算数・技術）第 1 問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 下図のような 1 辺の長さ 10 cm の正方形 ABCD がある．点 P および点 Q は時刻 0 に A および B をそれぞれ出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒 1 cm 進む．また，点 R は時刻 0 に B を出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒 2 cm 進む．点 R が A に達するまでに △PQR の面積が 35 cm^2 となる時刻をすべて求めよ．



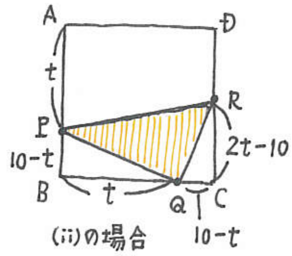
(i)の場合.

時刻をt秒として，次の場合を考える．

(i) 点Rが辺BC上を動くとき．すなわち $0 \leqq t \leqq 5$ のとき

$$\triangle PQR = \frac{1}{2}QR \cdot PB = \frac{1}{2}t(10-t) = -\frac{1}{2}(t-5)^2 + \frac{25}{2} < 35$$

∴ 条件をみたすtは存在しない



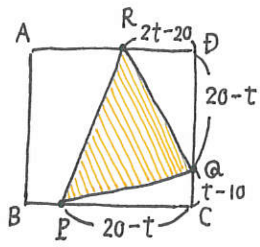
(ii)の場合

(ii) 点Rが辺CD上を動くとき．すなわち $5 \leqq t \leqq 10$ のとき

$$\begin{aligned}\triangle PQR &= (\text{台形 } PBCR) - \triangle PBQ - \triangle RQC \\ &= \frac{1}{2}(10-t+2t-10)\cdot 10 - \frac{1}{2}t(10-t) - \frac{1}{2}(10-t)(2t-10) \\ &= \frac{3}{2}t^2 - 15t + 50\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{3}{2}t^2 - 15t + 50 = 35 \iff t^2 - 10t + 10 = 0$$

$\therefore t = 5 \pm \sqrt{15}$ 　$5 \leqq t \leqq 10$ より．$t = 5 + \sqrt{15}$



(iii)の場合

(iii) 点Rが辺AD上を動くとき．すなわち $10 \leqq t \leqq 15$ のとき．

$$\begin{aligned}\triangle PQR &= (\text{台形 } RPCD) - \triangle QPC - \triangle RQD \\ &= \frac{1}{2}(2t-20+20-t)\cdot 10 - \frac{1}{2}(20-t)(t-10) - \frac{1}{2}(2t-20)(20-t) \\ &= \frac{3}{2}t^2 - 40t + 300 = 35\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{3}{2}t^2 - 40t + 300 = 35 \iff \frac{3}{2}t^2 - 40t + 265 = 0$$

$$\therefore t = \frac{40 \pm \sqrt{10}}{3}$$

(i)〜(iii) より．$\underline{t = 5 + \sqrt{15},\ \frac{40 \pm \sqrt{10}}{3}}$ //

岡山大学

2017年 文系 第3問

増田

$\boxed{3}$ aを実数とする．xの2次関数$f(x)=x^2+ax+1$の区間$a-1 \leqq x \leqq a+1$における最小値を$m(a)$とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $m\left(\frac{1}{2}\right)$を求めよ．

(2) $m(a)$をaの値で場合分けして求めよ．

(3) aが実数全体を動くとき，$m(a)$の最小値を求めよ．

(1) $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+1$ の区間 $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ における最小値を求める。

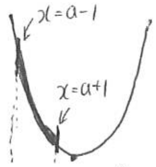
$$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+1-\frac{1}{16}$$
$$=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}$$

$f(x)$は$x=-\frac{1}{4}$のとき 最小値 $\frac{15}{16}$ をもつ。

$$\therefore\ m\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{16}$$

(2) $f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+1-\frac{a^2}{4}$

区間が 頂点 $x=-\frac{a}{2}$ より左にあるか、右にあるか、頂点を含むかで場合分けする。



(左にある場合)

i) $a+1<-\frac{a}{2}$ つまり $a<-\frac{2}{3}$ のとき

$$m(a)=f(a+1)$$
$$=(a+1)^2+a(a+1)+1$$
$$=2a^2+3a+2$$

ii) $-\frac{a}{2} \leqq a-1$ つまり $a \geqq \frac{2}{3}$ のとき

$$m(a)=f(a-1)$$
$$=(a-1)^2+a(a-1)+1$$
$$=2a^2-3a+2$$

iii) $-\frac{2}{3} \leqq a < \frac{2}{3}$ のとき (頂点が最小)

$$m(a)=f\left(-\frac{a}{2}\right)$$
$$=1-\frac{a^2}{4}$$

以上より

$$m(a)=\begin{cases} 2a^2+3a+2 & \left(a<-\frac{2}{3}\right) \\ 1-\frac{a^2}{4} & \left(-\frac{2}{3} \leqq a < \frac{2}{3}\right) \\ 2a^2-3a+2 & \left(a \geqq \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

(3)

$$m'(a)=\begin{cases} 4a+3 & \Rightarrow a=-\frac{3}{4} \text{ で最小} \\ -\frac{a}{2} & \Rightarrow a=0 \text{ で最大} \\ 4a-3 & \Rightarrow a=\frac{3}{4} \text{ で最小} \end{cases}$$

$m(a)$は区間の境界 $\left(a=\pm\frac{2}{3}\right)$ でなめらかにつながっているので、最小値の候補は $m\left(-\frac{3}{4}\right)$ か $m\left(\frac{3}{4}\right)$

$$m\left(-\frac{3}{4}\right)=2\left(-\frac{3}{4}\right)^2+3\left(-\frac{3}{4}\right)+2$$
$$=\frac{7}{8}$$

$$m\left(\frac{3}{4}\right)=2\left(\frac{3}{4}\right)^2-3\left(\frac{3}{4}\right)+2$$
$$=\frac{7}{8}$$

よって $m(a)$ の最小値は $\frac{7}{8}$

そのとき $a=\pm\frac{3}{4}$