＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ b，c を実数，q を正の実数とする．放物線 $P : y = -x^2 + bx + c$ の頂点の y 座標が q のとき，放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いてあらわせ．

（大阪大学　2017）

$\boxed{2}$ 実数 x, y, z が

$$x+y+z=1, \quad x+2y+3z=5$$

を満たすとする.

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ.

(2) $z \geqq 0$ のとき, xyz が最大となる z の値を求めよ.

（大阪大学　2017）

0002367812367999

大阪大学

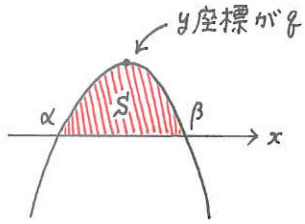
2017年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ b，c を実数，q を正の実数とする．放物線 $P: y=-x^2+bx+c$ の頂点の y 座標が q のとき，放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いてあらわせ．

P と x 軸との交点の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと，解と係数の関係より，

$\alpha+\beta=b$，$\alpha\beta=-c$ $\cdots$ (*) となる．



$$S=\int_\alpha^\beta -x^2+bx+c\,dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$\downarrow$ $\frac{1}{6}$公式

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots (**)$$

ここで (*) を使うと，

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=b^2+4c$$

$\therefore$ $\beta-\alpha>0$ より，$\beta-\alpha=\sqrt{b^2+4c}$

$y=-(x-\frac{1}{2}b)^2+\frac{1}{4}b^2+c$ となるので，$q=\frac{1}{4}b^2+c$

$\therefore$ $\beta-\alpha=2\sqrt{q}$

(**) に代入して，

$$\underline{S=\frac{4}{3}q\sqrt{q}}$$ //

2017年 文系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 実数 x, y, z が

$$x+y+z=1, \quad x+2y+3z=5$$

を満たすとする.

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ.

(2) $z \geqq 0$ のとき, xyz が最大となる z の値を求めよ.

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$ … (*) $x+y+z=1$ を代入した.

$x+y+z=1$ …①, $x+2y+3z=5$ …②

②−① より, $y+2z=4$ $\therefore y=-2z+4$

① に代入して, $x-2z+4+z=1$ $\therefore x=z-3$

これらを (*) に代入して, z のみで表すと,

$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}\{(3z-7)^2+(-3z+4)^2+3^2\}$

$=9z^2-33z+37$

$=9\left(z^2-\frac{11}{3}z\right)+37$

$=9\left(z-\frac{11}{6}\right)^2+\frac{27}{4}$

$\therefore$ 最小値は $\frac{27}{4}$ $\left(x=-\frac{7}{6}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{11}{6} \text{ のとき}\right)$ //

(2) (1) より, $xyz=(z-3)(-2z+4)z$

$=-2z^3+10z^2-12z$

これを $f(z)$ とおくと, $f'(z)=-6z^2+20z-12$

$=-2(3z^2-10z+6)$

$f'(z)=0$ となるのは, $z=\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}$ のとき

z	0	…	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$	…	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	…
$f'(z)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(z)$	0	↘		↗		↘

$2<\frac{5+\sqrt{7}}{3}$ と $f(2)=0$ より, 右の増減表より $f\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)>f(2)=0$

よって, xyz が最大となる z は, $z=\frac{5+\sqrt{7}}{3}$ //