_____ 年　番号 _____　氏名 ____________________________

$\boxed{1}$ 曲線 $y = x^3 - 4x + 1$ を C とする．直線 ℓ は C の接線であり，点 P(3，0) を通るものとする．また，ℓ の傾きは負であるとする．このとき，C と ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

（京都大学　2017）

$\boxed{2}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 8{a_n}^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく．b_{n+1} を b_n を用いてあらわせ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とおく．数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

（大阪大学　2017）

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 3a_n + 2n$ で表されるとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 と a_2 を求めよ．

(2) a_n を n の式で表せ．

（東北学院大学　2016）

2017年 文系 第1問

数理
石井K

$\boxed{1}$ 曲線 $y=x^3-4x+1$ を C とする．直線 ℓ は C の接線であり，点 $\mathrm{P}(3,\ 0)$ を通るものとする．また，ℓ の傾きは負であるとする．このとき，C と ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

$y'=3x^2-4$ より接点を (t, t^3-4t+1) とおくと，接線は

$y=(3t^2-4)(x-t)+t^3-4t+1 \iff y=(3t^2-4)x-2t^3+1$

と表せる．これが $P(3,0)$ を通ることより，

$$
\begin{aligned}
0 &= -2t^3+9t^2-11 \\
&= -(t+1)(2t^2-11t+11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r}
2t^2-11t+11 \\
t+1\ \big)\ 2t^3-9t^2+11 \\
2t^3+2t^2 \\ \hline
-11t^2+11 \\
-11t^2-11t \\ \hline
11t+11 \\
11t+11 \\ \hline
0
\end{array}
$$

$\therefore\ t=-1,\ \dfrac{11\pm\sqrt{33}}{4}$

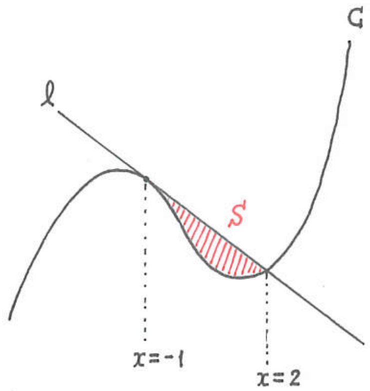
このうち，傾き $3t^2-4$ が負であるのは，$t=-1$ （補足参照）

そのときの接線 ℓ は，$y=-x+3$

C と ℓ のもう1つの共有点の x 座標は，解と係数の関係より，

$-2+x=0 \quad \therefore\ x=2$

よって，右図より，



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{2} -x+3-(x^3-4x+1)\,dx \\
&= -\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)\,dx \\
&= \frac{1}{12}\cdot 3^4 \\
&= \frac{27}{4}
\end{aligned}
$$

$\dfrac{1}{12}$ 公式

（補足）

$t=-1 \to y'=-1<0$

$t=\dfrac{11-\sqrt{33}}{4} \to \dfrac{11-\sqrt{33}}{4} > \dfrac{11-\sqrt{36}}{4} = \dfrac{5}{4} \qquad y' > 3\cdot\left(\dfrac{5}{4}\right)^2-4=\dfrac{11}{16}>0$

$t=\dfrac{11+\sqrt{33}}{4} \to y'>0$

2017年 文系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 8{a_n}^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく. b_{n+1} を b_n を用いてあらわせ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とおく. 数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ.

(4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ.

(1) 帰納的に $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であることが分かるので

漸化式の両辺, 底が2の対数をとり,

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8{a_n}^2$$
$$= 2\log_2 a_n + 3$$

$\therefore$ $\underline{b_{n+1} = 2b_n + 3}$ //

(2) $b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$

また, $b_1 = \log_2 a_1 = 1$ より, $b_1 + 3 = 4$

数列 $\{b_n + 3\}$ は初項4, 公比2の等比数列より, $b_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore$ $\underline{b_n = 2^{n+1} - 3}$ //

(3) $P_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であるから対数をとると,

$$\log_2 P_n = \log_2 a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$
$$= \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_n$$
$$= b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (2^{k+1} - 3)$$
$$= \frac{4(1-2^n)}{1-2} - 3n$$
$$= 2^{n+2} - 3n - 4$$

$\therefore$ $\underline{P_n = 2^{2^{n+2} - 3n - 4}}$ //

(4) $P_n > 10^{100} \iff \log_2 P_n > 100\log_2 10$

$\iff 2^{n+2} - 3n - 4 > 100\log_2 10 \quad \cdots (*)$

ここで, $3 < \log_2 10 < 4$ より,

$300 < 100\log_2 10 < 400$

一方 $(*)$ の左辺は,

$n = 1$ のとき, 1

$n = 2$ のとき, 6

$n = 3$ のとき, 19

$n = 4$ のとき, 48

$n = 5$ のとき, 109

$n = 6$ のとき, 234

$n = 7$ のとき, 487

$\therefore$ $\underline{n = 7}$ //

東北学院大学

2016年 文系 第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 3a_n + 2n$ で表されるとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 と a_2 を求めよ．

(2) a_n を n の式で表せ．

(1) $a_1 = S_1 = 3a_1 + 2\cdot 1$　よって，$\underline{a_1 = -1}$ //

$S_2 = a_1 + a_2$ より，　$3\cdot a_2 + 4 = -1 + a_2$　$\therefore \underline{a_2 = -\frac{5}{2}}$ //

(2) $n \geqq 2$ のとき．

$S_{n-1} = 3a_{n-1} + 2(n-1)$ …①

$S_n = 3a_n + 2n$ …②

②−① より，　$S_n - S_{n-1} = 3a_n - 3a_{n-1} + 2$

$\therefore\ a_n = 3a_n - 3a_{n-1} + 2$

$a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} - 1$

$\therefore\ a_n - 2 = \frac{3}{2}(a_{n-1} - 2)$

$\therefore$ 数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = -3$，公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列

よって，$a_n - 2 = -3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \underline{a_n = 2 - 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$ //　→　$a_n = 2\left\{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$ でもよい