＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 自然数 n に対して

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

とおく．また，

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots\cdots 5\cdot 3\cdot 1 & (n\text{が奇数のとき}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots\cdots 6\cdot 4\cdot 2 & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $1000!$ を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ．

(2) $1000!!$ を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ．

(3) $999!!$ を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ．

（大阪市立大学　2018）

$\boxed{2}$ m，t を正の実数とし，$mt > 1$ とする．xy 平面上に 2 点 A(1，0)，B(0，t) をとる．原点を O(0，0) とする．また，2 直線

$$\ell_1 : y = -\frac{1}{m}x + t$$
$$\ell_2 : y = m(x-1)$$

の交点を P とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) 点 P の座標を m と t を用いて表せ．

(2) 三角形 OAP の外接円の直径を m と t を用いて表せ．

(3) t を固定したとき，$\angle$OPA の大きさは m によらず一定であることを示せ．

（大阪市立大学　2018）

$\boxed{3}$ p を正の実数，q を $-2p^3 < q < 2p^3$ をみたす実数とする．

$$f(x) = x^3 - 3p^2x + q$$

とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) x が実数全体を動くとき，$f(x)$ が極値をとる x とそのときの極値をすべて求めよ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は相異なる 3 つの実数解を持つことを示せ．

(3) (2) の 3 つの解は，すべて

$$-2p < x < 2p$$

をみたすことを示せ．

(4) (2) の 3 つの解のうちの 1 つを $0 < \theta < \pi$ である θ を用いて $2p\cos\theta$ と表したとき，

$$2p\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right), \quad 2p\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$$

も解となることを示せ．

（大阪市立大学　2018）

$\boxed{4}$ $0 < k < 1$ とする．平面上の凸四角形 ABCD に対して，点 P，Q，R，S を関係式

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{CR}} = k\overrightarrow{\mathrm{CD}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{DS}} = k\overrightarrow{\mathrm{DA}}$$

によって定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) 原点を O とする．等式

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}} + \overrightarrow{\mathrm{OS}}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 比の値

$$\frac{\text{（六角形 PBQRDS の面積）}}{\text{（四角形 ABCD の面積）}}$$

を k を用いて表せ．

(3) 比の値

$$\frac{\text{（四角形 PQRS の面積）}}{\text{（四角形 ABCD の面積）}}$$

を k を用いて表せ．

(4) $0 < k < 1$ の範囲で k を動かすとき，(3) の比の値の最小値とそのときの k を求めよ．

（大阪市立大学　2018）

5 自然数 n に対して

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k},\quad T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n に対して $S_{2n}=T_n$ が成り立つことを示せ．

(2) 極限 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ を求めよ．

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}$ を求めよ．

（大阪市立大学　2018）

6 n を自然数とする．$0\leqq a_k\leqq 1$ をみたす数列 $\{a_k\}$ に対して

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

とおく．実数 x に対して

$$I_n(x)=b_n(1-a_1x)(1-a_2x)\cdots(1-a_nx)$$

と定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) $a\geqq 0$ とする．$x\geqq 0$ に対して不等式 $1-ax\leqq e^{-ax}$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $\int_0^1 I_n(x)\,dx\leqq 1$ を示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=1$ が成り立つとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 I_n(x)\,dx=1$$

となることを示せ．

（大阪市立大学　2018）

7 次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 定積分

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx+\int_1^e(\log y)^2\,dy$$

の値を求めよ．

(2) $f(x)=\tan x$ とする．関数 $y=f(x)$ は $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲で逆関数 $x=f^{-1}(y)$ を持つ．定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx+\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy\quad\text{および}\quad\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy$$

の値を求めよ．

(3) 定積分

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx+\int_1^e\sqrt{\log y}\,dy$$

の値を求めよ．

（大阪市立大学　2018）